目　　录

第一章　Desargues 几何与 Desargues 数系

1.1　常用几何的 Hilbert 公理系统

本书所称**常用几何**，也就是通常的欧几里得几何.

Hilbert 的名著《几何基础》，第一次为常用几何提出了一个完整的公理系统，使常用几何从此有了一个真正严实的基础. Hilbert 的公理系统以一些不必要给以定义的基本概念作为讨论的目标. 这些基本概念分成两类——基本对象，即点、直线以及平面；这些对象间的基本关系，即属于、介于以及全合于. 它们服从若干公理，并作为逻辑推理的出发点. Hilbert 把这些公理分成了五大类，构成了足以完全地刻划常用几何的一个完备的公理系统. 这五类公理的名称如下：

HI 关联公理(从属公理)

HII 次序公理

HIII 全合公理

HIV 平行公理

HV 连续公理

Hilbert 的主要目的在于对空间直观给以系统的逻辑分析. 为此，他详尽地探究了一些公理之间的逻辑关系，并提出了公理独立性的概念. 但实际上，Hilbert 在建立他的公理系统时并没有真正遵守他的公理独立性的要求. 例如第二类次序公理 HII 必须依赖第一类关联公理 HI 进行表达，而第三类全合公理 HIII 又必须依赖第一类与第二类的公理才能表达. 在《几何基础》1899 年第一版中罗列的那些公理并不是完全独立的，有些公理就可以从其它公理推导出来. 只是在以后的几版中，Hilbert 对他的公理系统作了某些修改后，才使得这种“多余”的公理不再出现. 为

此使某些公理显得很不自然，而且某些直观上极为显然的自明之理也必须从公理推导出来，而这些推导往往是颇为烦琐冗长的．我们认为，仅仅为了减少几个公理而过分追求公理的独立性以致牺牲整个理论的简明性的做法是得不偿失的，是不足取的．对于本书的主题，几何学的机械化说来，更不能对公理之间的独立与否拘泥太甚．

与公理化的思想相反，Hilbert 的原著实质上已蕴含了与本书主题相符的几何学机械化的思想与方法．这一点似乎还从来没有人明确地指出过，甚至 Hilbert 本人对此是否有明确的认识也很难说．本章以及第二、三章中，我们将说明 Hilbert 一书在几何学机械化方面所起的巨大作用．

虽然从我们的观点与目的来看并不认为 Hilbert 的公理系统是十分圆满的，但我们仍将依照 Hilbert 原著第八版中修改过的公理系统罗列于下，以作为本书今后讨论的依据．同时，为了简化我们的讨论，罗列的公理将局限于平面常用几何．因此，其基本对象只有两种，即点与直线．此外，为了简化语言的表达，若非另有说明，凡说到两个、三个、……点或直线时，都指两个、三个、……互不相同的点或直线．

HI 关联公理（从属公理）

基本关系为点属于直线．我们也沿用习惯用语，例如点在直线上，直线经过点，两点的连线，直线相交于一点等等．公理为

I1 对任意两点 A 与 B，恒有一直线 a，既过 A 也过 B．

I2 对任意两点 A 与 B，既过 A 也过 B 的直线最多只有一条．

I3 一直线上至少有两点，至少有三个点不在同一条直线上．

依据 I1 和 I2，由两点 A，B 所唯一确定的直线记为 AB．两直线 l_1，l_2 相交于一点时，其交点记为 $l_1 \wedge l_2$．

HII 次序公理

基本关系为一点介于两点之间，或一点在两点之间．对于平面

的情形包括 Pasch 公理等四条．依据这些公理可以定义线段、射线或半直线、折线、角，又可推出直线上一点分隔直线成两侧，平面上一直线分隔平面成两侧，以及一角或一多边形分隔平面成内、外两部分等定理．较详细的叙述可参阅第二章 2.5 节，这里从略．

HIII 全合公理

基本关系为线段与角的全合或相等．公理为

III1 设 A, B 是直线 a 上的两点，A' 是另一直线 a' 上的一点，则在 a' 被 A' 所分成的任一射线上，恒有一点 B'，使线段 AB 与 $A'B'$ 全合或相等，记作

$$AB \equiv A'B'$$

III2 若两线段 $A'B'$ 与 $A''B''$ 都和另一线段 AB 全合，则线段 $A'B'$ 与 $A''B''$ 也全合．

III3 设两线段 AB 与 BC 在同一直线 a 上，无公共点．又设两线段 $A'B'$ 与 $B'C'$ 同在这一直线 a 上或同在另一直线 a' 上，也无公共点．若

$$AB \equiv A'B' \qquad BC \equiv B'C'$$

则

$$AC \equiv A'C'$$

III4 设给定了一个角 $\measuredangle(h, k)$，一直线 a' 及其一侧，又设 a' 上的一点 O' 及其所分成两射线之一 h'，则必恰有一条以 O' 为起点的射线 k'，使角 $\measuredangle(h, k)$ 与角 $\measuredangle(h', k')$ 全合或相等，而且使角 $\measuredangle(h', k')$ 的内部在 a' 的给定的一侧，记为

$$\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h', k')$$

又每一个角和它自己全合，即

$$\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h, k)$$

III5 两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$，若有下列全合式

$$AB \equiv A'B' \qquad AC \equiv A'C' \qquad \measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C'$$

则也恒有全合式

$$\measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C'$$

从这些公理以及 HI—HII 可以定义直角与垂直，线段与角的移置，线段与角的相加，以及线段长短与角的大小的比较等概念.

从公理 HI—HIII 可以证明常用几何中那些有关全合三角形的定理，等腰三角形的定理，垂线的定理，以及平分线段与平分角的定理等. 此外还可象欧几里得《几何原本》中那样证明一些不等关系的定理，例如三角形的外角大于任一不相邻的内角，以及三角形两边之和大于第三边等. 根据这些公理，HI—HIII 只能证明三角形三角之和必小于或等于两直角，但不能证明必等于两直角.

HIV 平行公理

这类公理只有一条，即所谓欧几里得公理：设 a 是任一直线，A 是不在 a 上的任意一点，则至多有一条直线通过 A 而不与 a 相交.

根据这一公理以及前述的全合等公理，即可以知道通过 A 而不与 a 相交的直线不仅至多有一条，而且恰有一条，还可以证明三角形三内角之和等于两直角等一类定理.

由于以后我们将脱离全合公理或次序公理来进行讨论，因而我们将对这一平行公理采取一种加强的形式，这在 Hilbert 原书中记为平行公理 IV*，我们将迳记为平行公理 IV，述之如下：

IV 设 a 是任一直线，A 是不在 a 上的任意一点，则恰有一条直线通过 A，而不与 a 相交.

称两条不相交的直线 a, b 互相平行，记作

$$a // b$$

从公理 IV 可知，两条直线都与第三条直线平行时，这两条直线也互相平行.

HV 连续公理

不需要再引进新的基本关系，公理共有两条：

V1（度量公理或阿基米德公理） 若 AB 和 CD 是两条任意线段，从点 A 起始通过点 B 的射线上必有这样的有限个点：A_1,

$A_2, \cdots, A_n$，使得线段 AA_1，A_1A_2，$\cdots$，$A_{n-1}A_n$ 都和线段 CD 全合，而使 B 在 A 和 A_n 之间.

V2（直线完全性公理） 一直线上的点所成的点集在保持直线上的次序，第一条全合公理和阿基米德公理(即公理 HI，HII，HIII1，HV1）的条件之下，不可能再行扩充.

以上五类定理对本书具有特殊意义的是第五类连续公理. 它包括两条公理，即第一条的度量公理或阿基米德公理，和第二条的直线完全性公理. 这一类公理讨论直观上连续的性质，其作用正如 Hilbert 原书所说，第一条公理是为连续的要求作准备，而第二条公理则与其它公理一起，是为了完成整个公理系统. Hilbert 还指出，在他的《几何基础》一书的研究中，主要用第一条阿基米德公理作根据，而普遍地不假设第二条完全性公理. 事实上，在 Hilbert 该书的第一版中，第五类连续公理只包括一条阿基米德公理，只是在以后的几版中才添入了完全性公理. 这一完全性公理的添入是极为生硬的，目的纯粹是为了填补平面或空间中的“空隙”，并使所讨论的几何学唯一地成为通常的那种欧几里得几何学. 在 Hilbert 全书的讨论中，不仅完全性公理不起任何作用，而且 Hilbert 在建立他的有关几何学的重要理论时也避免使用第一条阿基米德公理. 因而 Hilbert 的欧几里得几何学实质上是一种非阿基米德的几何学. 在 Rashevsky 关于 Hilbert《几何基础》俄文版的序言中，对此曾有精辟的论述.

指出这一点对于本书所阐述的几何学的机械化是极为重要的. 首先，连续公理不可避免地要涉及直线或平面上所有点或无穷多个点的集合这一类概念. 另一方面，在几何学的任一公理或定理的假设与终结中，涉及的总是有限个点、直线或圆等等. 在一个证明过程中，也无非是通过有限次的构造性的步骤，迭次应用公理和已知定理于这些有限多个点、直线或圆上面，使得论证得以从假设到达终结. 所谓定理证明的机械化乃是指对于某一类定理证明过程的构造性步骤可以通过一种确定的机械方式一步步地给出，并足以保证在有限步骤之后，或从假设到达终结，或指出不可

能到达终结．这种机械的有限步骤在电子计算机上很容易实现，这正是把证明过程机械化的目的所在．由于电子计算机只能处理有限的事物，所以定理叙述与定理证明的有限性也就成为能利用计算机的先决条件．Hilbert 在《几何基础》一书中避开连续公理来发展几何学的研究方式正好为几何学定理证明的机械化以及使用计算机进行这一工作排除了障碍，为其成功提供了必需的先决条件．

事实上，Hilbert 自己就已给出了关于几何定理证明机械化的具体成果，详见本书第三章．Hilbert 从他的公理系统出发，不假助于连续公理，达到了某种程度的机械化并获得了具体的机械化．他的方法主要在于通过这些公理引进由几何所确定的数系统．这一过程可以称为几何的代数化．通过这种直线上的点与数系统的数之间的对应关系可以引进坐标．这样，几何的定理就变为代数关系式之间的定理，后者证明的机械化问题表达起来就比较明确，通常也易于解决．这些代数关系式或者是坐标间的多项式等式，或者是多项式不等式．后者反应了几何中的某种次序关系．但是，除了平面的初等几何学定理以外，一般说来真正考虑次序关系的定理是不多见的．此外，我们的机械化证明定理的方法在处理相当于多项式等式关系的那种几何定理时有很高的效率，而在处理多项式不等式关系时则要复杂困难得多（这是指计算上的复杂度与可行性），因此，在理论上就有理由避免使用次序公理以建立较一般的常用几何学．为此，在本章以下各节中，我们将介绍与 Hilbert 公理系统稍有不同的公理系统，它不仅避免使用连续公理，也不利用次序公理．在此公理系统上我们将建立起多种广义的常用几何．本章以及下一章将说明这种几何如何从公理化走向代数化与坐标化，而在以后几章中再来说明这种几何定理证明的机械化问题．

1.2 无限公理与 Desargues 公理

在下面所考虑的(平面)几何中,仍以点与直线为基本对象,点在直线上的关系为基本关系,并将假定 Hilbert 的关联公理 HI 与平行公理 HIV, 但不引进任何有关次序的概念,更不假定任何次序公理. 在这种几何中,线段与射线等词是没有任何意义的,因而角、三角形、多边形等词至少不能象通常那样来定义. 尽管如此,我们仍可在这种几何中以另一种方式定义三角形与平行四边形的概念如下. 注意,提到平行直线时,总是指不相交也不相同的直线.

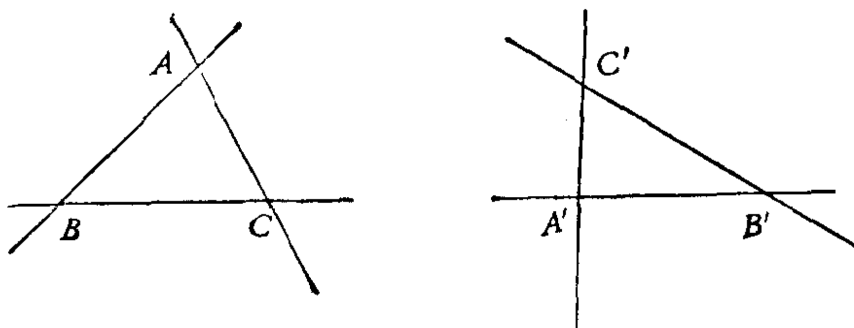


图 1.1

定义1 依一定次序排列的三个点 A, B, C, 如果彼此不同且不在一直线上,将构成一个三角形,记作 $\triangle ABC$. 这时 A, B, C 称为这一三角形的顶点, 彼此的连线 AB, AC, BC 称为三角形的边. 对于两个三角形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 来说, 可以依照它们顶点的次序称 A, A'; B, B' 与 C, C' 是三组对应的顶点,同样称 AB, $A'B'$; AC, $A'C'$ 以及 BC, $B'C'$ 为三组对应的边. 见图 1.1.

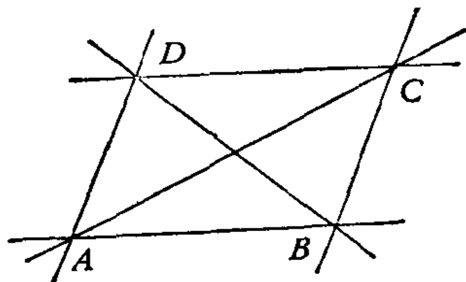


图 1.2

定义2 依一定次序排列的四个点 A, B, C, D 将构成一个平行四边形,记作 $\square ABCD$. 如果这四点彼此不同, 也没有三点

在一直线上，而且 A, B 的连线 AB 与 C, D 的连线 CD 平行，A, D 的连线 AD 也与 B, C 的连线 BC 平行，即 $AB /\!/ CD$，$AD /\!/ BC$，这时称 A, B, C, D 为 $\square ABCD$ 的**顶点**．A, C 与 B, D 各为一对**对顶点**．称直线 AB, BC, CD, AD 为 $\square ABCD$ 的**边**，其中 AB, CD 是一组**对边**，AD, BC 是另一组**对边**．又 A, C 的连线 AC 与 B, D 的连线 BD 称为 $\square ABCD$ 的**对角线**．见图 1.2．

从两点 A, B 出发，至少可作出一平行四边形如次．由公理 HI，在直线 AB 外必另有一点，例如 C． 依公理 HIV 可过 B 作直线平行于 AC，也可过 C 作直线平行于 AB．仍由公理 HIV，这两直线不能平行而必相交于一点设为 D，于是 $ABDC$ 即为一平行四边形．

作为次序公理的一种代替，我们引入下述的无限公理．

无限公理 I 设直线 l 上任意两点 A_0, A_1，任作 $\square A_0A_1BC$．过 B 作直线 $BA_2 /\!/ CA_1$ 交 l 于 A_2，作 $BA_3 /\!/ CA_2$ 交 l 于 A_3，依次类推．又过 C 作直线 $CA_{-1} /\!/ BA_0$ 交 l 于 A_{-1}，作 $CA_{-2} /\!/ BA_{-1}$ 交 l 于 A_{-2}，依次类推．则无穷序列

$$\cdots A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \cdots$$

中无两点相同．见图 1.3．

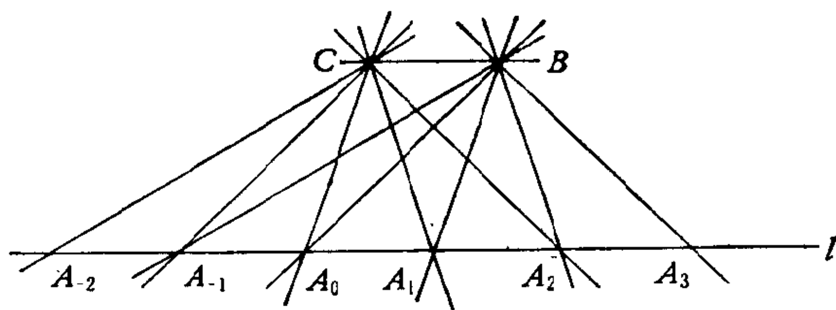


图 1.3

这一公理 I 有时也记为**公理** D_∞．又 $A_2 \neq A_0$ 这一部分相当于 $\square A_0A_1BC$ 的对角线必相交，在文献中称为 Fano **公理**．

公理 I 保证了平行四边形的对角线必相交，也保证了直线与平面上必有无穷多个点． 由此还易知，过任意一点也有无穷多条

不同的直线.

除上述无限公理 I 外，我们还将引入两条以 Dasargues 命名的公理，这两条公理对于建立几何的代数化进而机械化起着决定性的作用. 公理的叙述如下.

Desargues 公理 D_1 设两三角形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的三组对应边互相平行，即

$$AB /\!/ A'B' \qquad AC /\!/ A'C' \qquad BC /\!/ B'C'$$

则三组对应顶点的连线 AA', BB', CC' 互相平行或相交于一点.

Desargues 公理 D_2 设两三角形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$，若它们有两组对应边互相平行，例如

$$AB /\!/ A'B' \qquad AC /\!/ A'C'$$

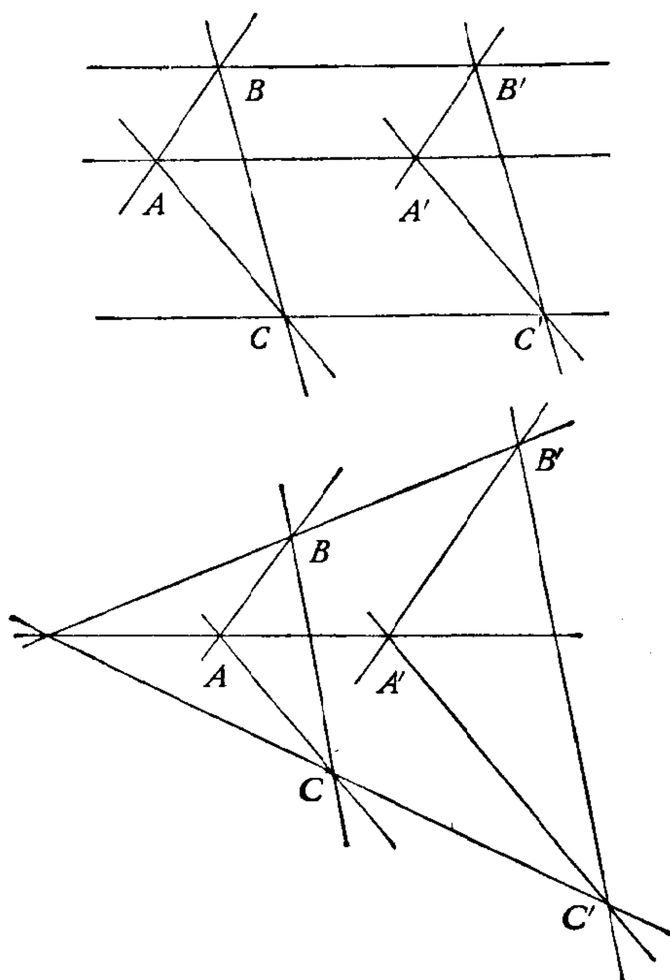


图 1.4

又三组对应顶点的连线互不相同而互相平行或相交于一点，则这两个三角形的第三组对应边也互相平行，即

$$BC /\!/ B'C'$$

见图 1.4.

显然这两条 Desargues 公理 D_1 与 D_2 并不是互相独立的，即在其它公理 HI，HIV 与 I (或 D_∞)成立的假定之下，D_1 与 D_2 可互相推导而得.

两条 Desargues 公理的一个直接推论是可以引入中点与对称点的概念，其法如下.

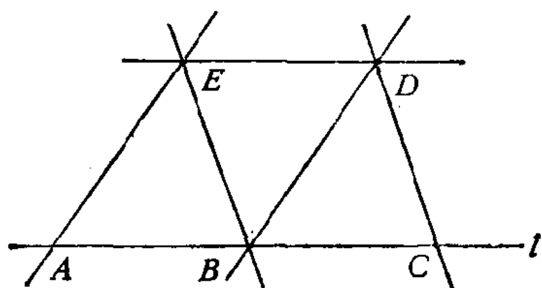


图 1.5

如图 1.5，设直线 l 上任意两点 A, B. 如前任作 $\square ABDE$. 过 D 作 BE 的平行线与 l 交于 C. 依无限公理 I，C 与 A 不同. 应用 Desargues 公理可证 C 点与 $\square ABDE$ 的作法无关，证之如次.

设 $ABD'E'$ 为另一平行四边形，并作 $D'C' /\!/ E'B$ 与 l 交于 C'. 须证 $C' = C$. 现试就几种不同情形分别进行讨论.

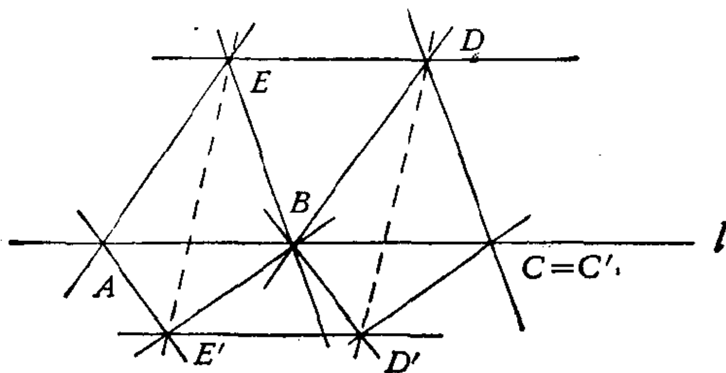


图 1.6

先设直线 AE' 与 AE 不同，且设 E, B, E' 不在一直线上，EE' 也不平行于 l，见图 1.6. 此时 $DE, D'E', l$ 彼此不同且互相平行. 又 A, E, E' 不在一直线上，因而成一三角形. 由公理 HIV 知 B, D, D' 也不在一直线上而成一三角形. 今应用 Desargues

公理 D_2 于 $\triangle AEE'$ 与 $\triangle BDD'$，可知 $EE' /\!/ DD'$。又因 B, E, E' 不在一直线上而成一三角形，因而由公理 HIV，C, D, D' 也不在一直线上而成一三角形。今再应用 Desargues 公理 D_2 于 $\triangle BFE'$ 与 $\triangle CDD'$，即知 $D'C /\!/ E'B$。于是仍由公理 HIV 知 $D'C$ 与 $D'C'$ 两直线相同，而 C 与 C' 重合。

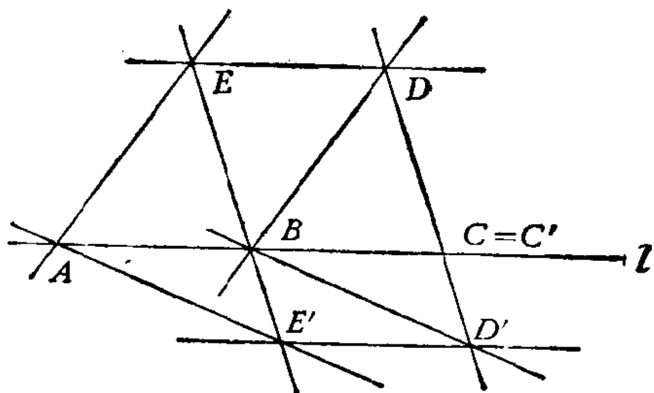


图 1.7

其次设 AE' 与 AE 仍为不同直线，而 E, B, E' 在一直线上，见图 1.7。则如前仍有 $DD' /\!/ EE'$。因而直线 $D'C'$, DD' 与 DC 都相同，而仍有 $C'=C$。

最后设直线 AE' 与 AE 相同（图 1.8），或虽不相同而 $EE' /\!/ l$（图 1.9）。不论何时恒可过 A 作一不同于 AE, AE' 与 l 的直线并在上取一不同于 A 且使 EE'', $E'E''$ 都不平行于 l 的点 E''。

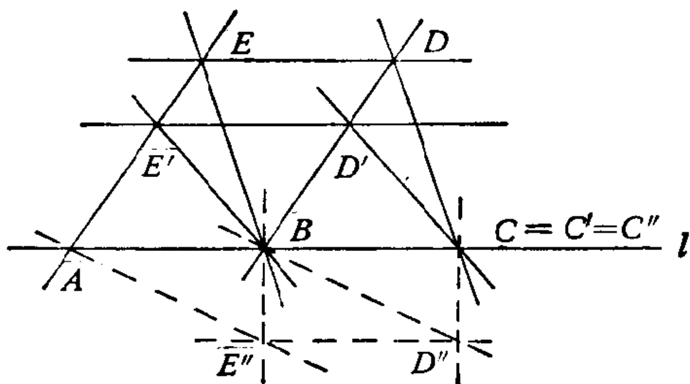


图 1.8

补作 $\square ABD''E''$，又作 $D''C'' /\!/ E''B$ 而与 l 交于 C''。把前已证明的情形用于 $\square ABDE$ 与 $\square ABD''E''$，可知 $C''=C$。又用于 $\square ABD'E'$ 与 $\square ABD''E''$，可知 $C''=C'$，因而 $C'=C$。如所欲证。

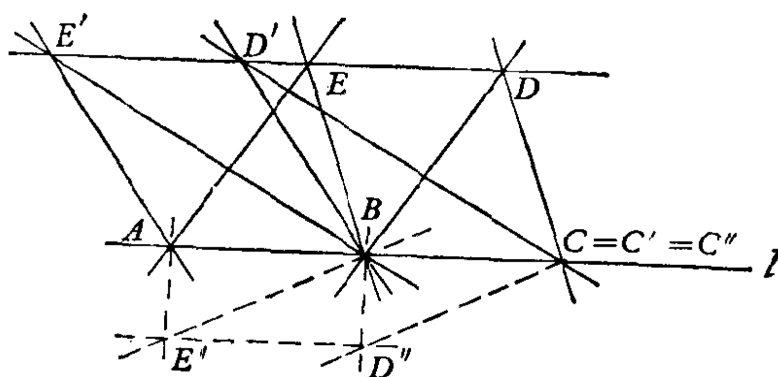


图 1.9

我们不惮其烦地详细写出上面的证明，其理由将在第三章 3.1 节中说明.

由上所证可知下面的定义是合理的.

定义 3 对于直线 l 上任意两点 $A \neq B$ 作 ▱$ABDE$，并作 $DC /\!/ EB$ 而与 l 交于 C，则 C 点与 ▱$ABDE$ 的作法无关，而称 C 为 A 对 B 的**对称点**. 此外又称任意一点为此点对其自身的**对称点**.

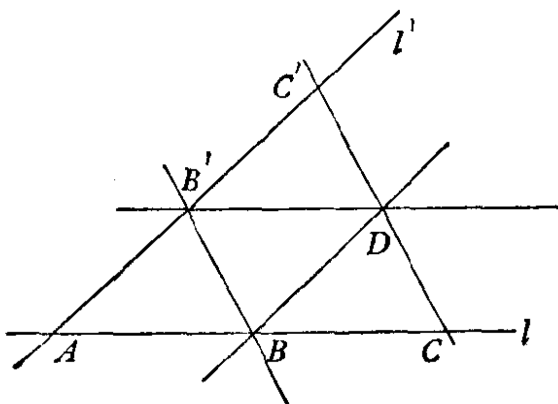


图 1.10

由此定义容易证明：若 C 是 A 对 B 的对称点，则 A 也是 C 对 B 的对称点. 又若两直线 l, l' 相交于 A, B, B' 各为 l, l' 上与 A 不同的点，而 C, C' 各为 A 对 B 与 A 对 B' 的对称点，则 CC' 必与 BB' 平行.

证明由图 1.10 自明，其中 $ABDB'$ 是平行四边形.

今引进两点的**中点**概念如下.

如图 1.11 仍设直线 l 上任意两点 A 与 B. 过 A 任作一不同于 l 的直线 l'，并在上任取一不同于 A 的点 M'. 作 A 对 M' 的对称点 B'. 过 M' 作 BB' 的平行线与 l 交于 M. 试证 M 与 l' 以及 M' 的选择无关如次.

首先注意 A 对 M 的对称点即为 B. 盖设 A 对 M 的对称点为 $\bar{B}$,

则由前应有 $B'\bar{B}/\!/M'M$. 故两直线 $B'\bar{B}$ 与 $B'B$ 相同，因而 $\bar{B}=B$ 即 A 对 M 的对称点为 B.

为证 M 与 (l',M') 的选择无关，可设 l'' 是又一与 l 不相同的直线，而 M'' 是其上不同于 A 的任一点(l'' 也可与 l' 相同). 参见图1.11与1.12. 作 A 对 M'' 的对称点 B''，则因 A 对 M 的对称点为 B，故由前有 $B''B/\!/M''M$. 因而从(l'',M'')将与从(l',M')导致同一点 M，即所欲证.

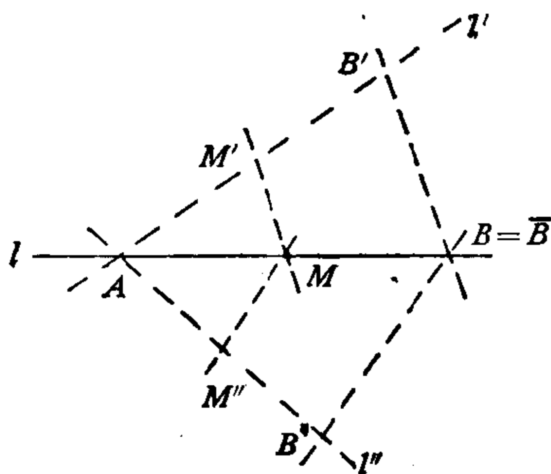


图 1.11

依据上述证明下面的定义是合理的.

定义4 设直线 l 上两点 A,B. 过 A 任作不同于 l 的直线 l'，于其上任取不同于 A 的点 M'.

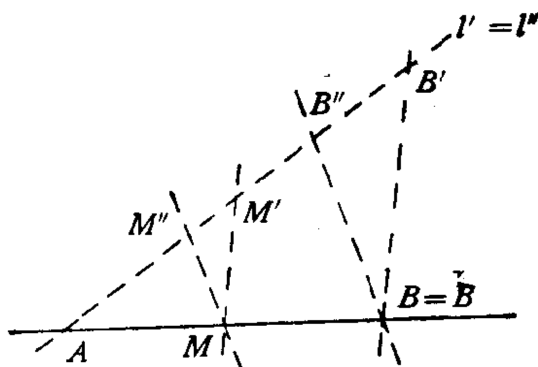


图 1.12

作 A 对 M' 的对称点 B'，并过 M' 作 $M'M/\!/B'B$ 与 l 交于 M，则 M 与 l',M' 的选择无关，称它为 A 与 B 的**中点**. 又定义相同两点的**中点**为该点自身.

由以上定义易证 A,B 的中点也即是 B,A 的中点. 又设三角形 $\triangle ABC$. 若 A,B 的中点为 M，而 A,C 的中点为 N，则 MN 必平行于 AB.

定理1 平行四边形的对角线必相交且互相平分，即两对角线的交点为两对对顶点的共同中点.

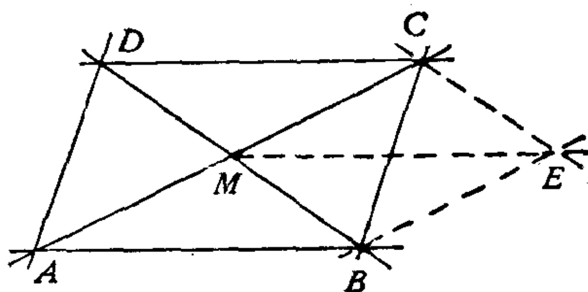


图 1.13

证 如图1.13,设 ▱$ABCD$, 由公理I,其对角线 AC, BD 必相交. 设其交点为 M. 过 B, C 各作 AC, BD 的平行线相交于 E. 应用 Desargues 公理 D_1 于 $\triangle AMD$ 与 $\triangle BEC$, 即知 $ME /\!/ AB /\!/ CD$. 由于 $AMEB$, $MCEB$ 都是平行四边形, 故 C 是 A 对 M 的对称点或 M 是 AC 的中点. 同样 M 也是 BD 的中点或 AC, BD 互相平分于交点 M. 如所欲证.

易见上定理之逆也成立,即有下面的定理.

定理 2 设四点 A, B, C, D 彼此不同且无三点在一直线上. 若 A, C 的中点与 B, D 的中点相同,则 $ABCD$ 是平行四边形.

依据中点与对称点的那些结果,可知无限公理 I (或 D_∞) 中由 A_0, A_1 所定的点 A_n ($n=\pm1, \pm2, \cdots$) 也可用下面的方式确定:

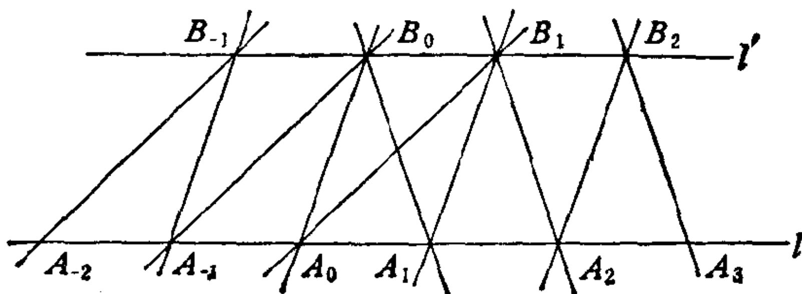


图 1.14

如图1.14, 任作 $l' /\!/ l$, 又任作 $A_0B_0 /\!/ A_1B_1$ 并与 l' 交于 B_0, B_1. 过 B_1 作 $B_1A_2 /\!/ B_0A_1$ 交 l 于 A_2, 过 A_2 作 $A_2B_2 /\!/ A_1B_1$ 交 l' 于 B_2, 又过 B_2 作 $B_2A_3 /\!/ B_1A_2$ 交 l 于 A_3, 依次类推得点 A_2, A_3, A_4, $\cdots$. 其次过 B_0 作 $B_0A_{-1} /\!/ B_1A_0$ 交 l 于 A_{-1}, 过 A_{-1} 作 $A_{-1}B_{-1} /\!/ A_0B_0$ 交 l' 于 B_{-1}, 又过 B_{-1} 作 $B_{-1}A_{-2}$ 交 l 于 A_{-2}, 依次类推得点 A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, $\cdots$.

易见诸点 A_n 与公理 I 中所得者相同，也可由现在的作法所得诸不同点作为公理 I，依此则可以引进对称点与中点的概念并证明原来公理中的点 A_n 与此处相同. 总之，在公理 HI，HIV 与 D_1，D_2 的假定下，无限公理 I 的两种叙述方法是等价的.

1.3 Desargues 平面中的有理点

上节引进了无限公理 D_∞，以及 Desargues 公理 D_1，D_2，由此导出了中点与对称点的概念（在 HI，HIV 成立的假定下）. 考虑上节开首时无限公理 D_∞ 的附图，显然有 A_1 是 A_0 与 A_2 的中点，A_2 是 A_1 与 A_3 的中点，又 A_0 是 A_{-1} 与 A_1 的中点等等. 本节将进一步探讨这类关系.

定义 1 公理 D_∞，D_1，D_2 总称为 D，满足 Hilbert 关联公理 HI，平行公理 HIV，公理组 D 的点与直线的全体称为构成一个 Desargues 平面，相应的几何称为 Desargues（平面）几何.

在 Hilbert 原来的公理系统中，全合关系是一种不加定义的基本关系. 在 Desargues 几何中，既未引入全合作为基本概念，更不假定任何全合公理，但仍可在任一直线上定义全合关系与某种加法，使序列（见上节无限公理 I 或 D_∞ 的附图）

$$\cdots A_{-n}, \cdots, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$$

与整数序列有某种同构关系，述之如下.

首先，任意两个有先后次序的点 A，B 不论其相同与否，都称为一个点偶，记作 (AB). 在 A 与 B 不相同时，定义点偶 (AB) 的中点为 A 与 B 的中点，而在 A 与 B 相同时，点偶 (AB) 的中点定义为 A. 今在直线上定义一全合概念如下.

定义 2 设直线 l 上有 A，B，C，D 四点. 不论这四点是否有相同者，若点偶 (AD) 与 (BC) 有相同的中点，则称点偶 (AB) 与 (CD) 全合，记作

$$(AB) \equiv (CD)$$

显然依据中点的简单性质，直接从此定义可知 $(AB) \equiv (CD)$

时，也有

$$(AC)\equiv(BD)$$

又设在直线 l 上 A, B, C 为已给定的三点时，不论有无相同者，使 $AB\equiv CD$ 的D点将唯一地由 A, B, C 所确定. 点D也可由下法作出.

在 $B=A$ 时，显然有 $D=C$，在 $C=A$ 时，也显然有 $D=B$，故以下将设 B, C 都不同于 A. 此时因 $B\neq A$，故可作 $\square ABB'A'$. 过 B' 作 $B'D /\!/ A'C$ 与 l 交于D，于是这一D点即为所求使 $(AB)\equiv(CD)$ 的点. 证之如次.

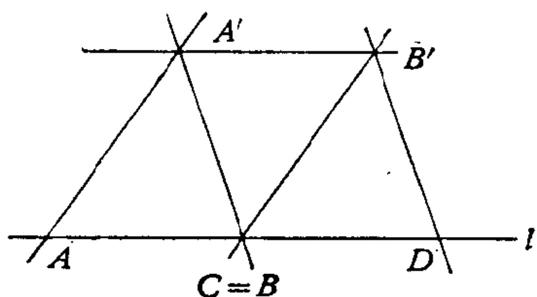


图 1.15

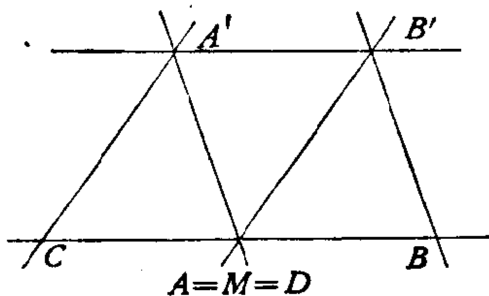


图 1.16

先设 $C=B$，则依中点定义C为 A, D 的中点，也是 (BC) 的中点. 因而 $(AB)\equiv(CD)$，而D即为所求. 如图 1.15.

今设 $C\neq B$，而命 B, C 的中点为 M. 若 $M=A$，则 $B'D /\!/ A'C$ 而与 $B'A$ 相同，D也与A相同，而 (AD) 的中点亦为 M. 因而 $(AB)\equiv(CD)$，而D即为所求. 如图 1.16.

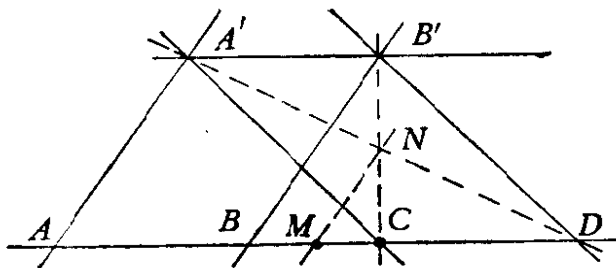


图 1.17

最后设 $C\neq B$ 且 B, C 的中点 $M\neq A$. 如图 1.17 作 $\square A'B'DC$ 的对角线 $A'D$ 与 $B'C$ 交于点N，则由上节定理1，N 是 B', C 也是 A', D 的中点. 从 $\triangle BCB'$ 可知 $MN /\!/ BB'$，因

而 $MN /\!/ AA'$. 从 $\triangle ADA'$ 知 M 也是 A, D 的中点. 故依定义 $(AB) \equiv (CD)$, 而 D 为所求. 证毕.

上述证明颇为烦琐,有兴趣的读者可见第三章的 3.1 节.

从这一证明与定义本身易见全合关系的自反性、对称性与传递性. 换言之,有下述定理:

定理 直线上点偶的全合关系≡是一等价关系。

以下将引进点偶的加法. 为此先证下面的引理:

引理 设同一直线 l 上有 A, B, C, D, E, F 等点,其中

$$(AB) \equiv (DE) \qquad (BC) \equiv (EF)$$

则不论这些点有无相同,都有

$$(AC) \equiv (DF)$$

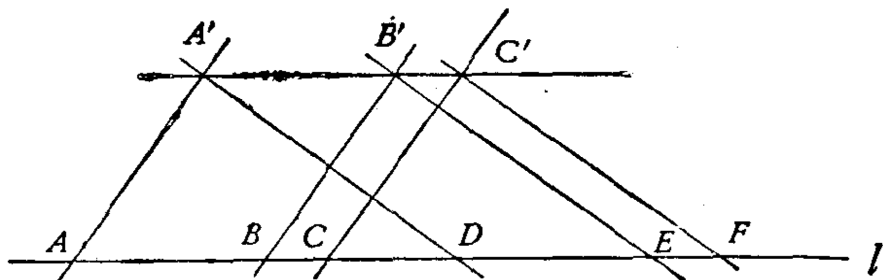


图 1.18

证 如图 1.18, 在 A, B, C 都不相同时, 可作 $\square ABB'A'$, $\square BCC'B'$. 则依全合作法 $A'DEB'$, $B'EFC'$ 都是平行四边形. 由此知 $ACC'A'$, $DFC'A'$ 都是平行四边形. 因而仍由全合作法知 $(AC) \equiv (DF)$.

当 A, B, C 有相同者时,逐个检查可知仍有$(AC) \equiv (DF)$. 虽然我们略去了这一烦琐的检查, 但它却是必要的, 请见第三章 3.1 节.

基于上述引理,下面的定义是合理的.

定义 3 在直线 l 上固定一点 A_0, 对 l 上任意两点 R, S 作 T, 使 $(ST) \equiv (A_0R)$, 则称点偶 (A_0T) 为点偶 (A_0R) 与 (A_0S) 的和,记作

$$(A_0T) = (A_0R) + (A_0S)$$

对于固定的 A_0 而言，上式也简记为

$$T = R + S$$

称 T 为 R 与 S 的和(相对于固定的 A_0 而言)。

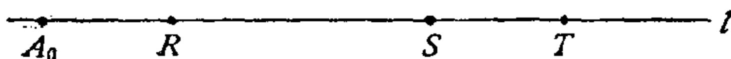


图 1.19

由此定义，特别有(对 A_0 而言)

$$R = A_0 + R$$

上节开始曾由直线上 A_0, A_1 两点作出直线上的无穷个点的序列

$$\cdots A_{-n}, \cdots, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots.$$

依据上面点偶加法的定义容易证明，若令 (A_0A_n) 与整数 n 相对应，则 (A_0A_n) 之间的加法与整数之间的加法相对应，即

$$(A_0A_n) + (A_0A_m) = (A_0A_{n+m})$$

或对固定的 A_0, A_1 而言，即

$$A_n + A_m = A_{n+m}$$

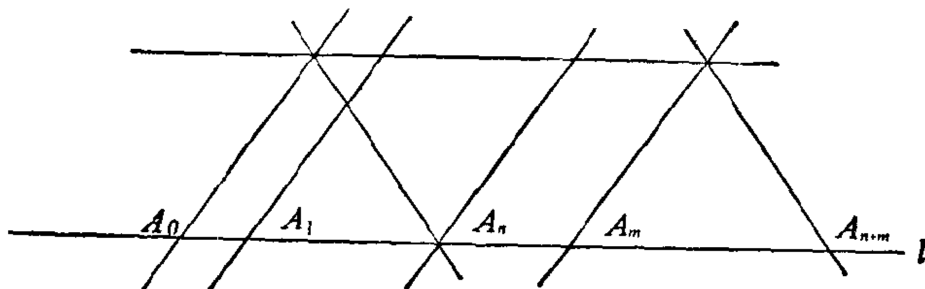


图 1.20

不仅如此，我们可对任意有理数 $r = p/q$(p, q 为整数，q 为正整数)在 l 上作一点 A_r，使 (A_0A_r) 与 r 对应时仍能保持其加法关系(r, s 为任意有理数):

$$(A_0A_r) + (A_0A_s) = (A_0A_{r+s})$$

或相对于固定的 A_0 而言，可简写为

$$A_r + A_s = A_{r+s}$$

如图 1.21 过 A_0 任作一与 l 不同的直线 l'，并在上任取一不

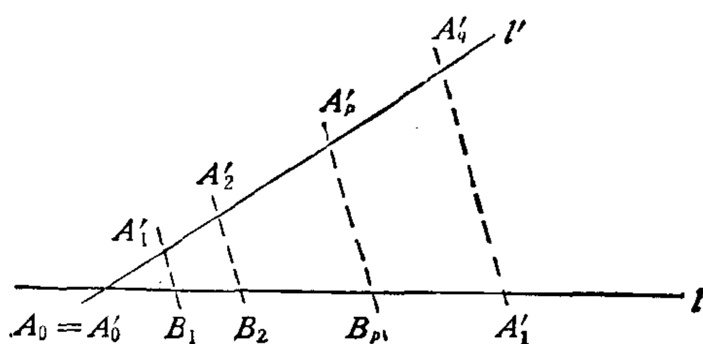


图 1.21

同于A_0的点A'_1，又记A_0为A'_0. 从A'_0，A'_1出发如上节无限公理D_∞附图所示作序列

$$\cdots A'_{-n},\cdots,A'_{-1},A'_0,A'_1,\cdots,A'_n,\cdots$$

连$A_1A'_q$. 作$A'_nB_n /\!/ A'_qA_1$与l交于B_n. 则易知B_p与l'以及A'_1的选择无关，且与$r=p/q$的表达形式无关，故可记B_p为

$$A_r=A_{p/q}=B_p$$

定义 4 $r=p/q$为有理数时，$A_{p/q}$称为有理地依赖于A_0，A_1的点.

依照这一定义，

$$A_{p/q}\longrightarrow p/q$$

在有理依赖于A_0，A_1的点的全体与有理数的全体之间建立了一一对应关系. 在这一对应下，相对于给定的A_0，A_1而言，A_r之间的加法与有理数之间的加法相对应. 如果定义A_r与A_s的乘积为A_{rs}（仍相对于A_0，A_1而言），则这些点之间的乘法也与有理数之间的乘法相对应，且这些点之间的加法和乘法保持了与有理数的加法和乘法相应的一切运算规则，特别是A_0对应于0，而A_1对应于1.

在有理数之间有大小的关系，使有理数集合成一有序集合，而在次序以及加法和乘法之间遵守着通常的那些关系. 由此，在对应$A_{p/q}\longrightarrow p/q$之下，在有理依赖于$A_0$，$A_1$点的全体之间，也可依相应有理数的大小引入次序概念，使遵守通常的那些次序关系. 特别是这些有理依赖于A_0，A_1的点、除A_0，A_1自身外，可分成

两部分：一部分在 A_0，A_1 之间，即相应有理数 r 大于 0 且小于 1 的那种点 A_r，称为有理线段 A_0A_1 内部的点；另一部分是不在 A_0，A_1 之间或 r 小于 0 或 r 大于 1 的那种点 A_r，称为有理线段 A_0A_1 外部的点. 总之，对任意三个有理依赖于 A_0，A_1 的点 A_r，A_s，A_t，可依有理数 r，s，t 的大小，定义其中一点在其它两点之间的次序关系. 这种在···之间的关系满足 Hilbert 在有关直线上的那些次序公理，但只局限于有理依赖于 A_0，A_1 的那些点. 应该着重指出：在本节所说的 Desargues 几何中，直线上的任意三点并不能引入满足 Hilbert 次序公理的那种次序关系.

从直线上点的有理依赖性出发，对平面上任意三个不同在一直线上的点 A，B，C，也容易定义有理依赖于它们的点：先在直线 BC 上任取一有理依赖于 B，C 的点 D，再在直线 AD 上任取一有理依赖于 A，D 的点 E，于是 E 即是一有理依赖于 A，B，C 的点. 容易证明，除了那些在三角形 ABC 的边线 AB，AC，BC 上者外，所有有理依赖于 A，B，C 的点可分成三角形的内部与外部两部分，称为三角形 ABC 的有理内部与有理外部. 它们具有通常几何中三角形内部与外部的那些性质. 虽然对于平面上的全体点来说相应的 Pasch 公理不一定满足，甚至没有意义，但同样可证明有理依赖于 A，B，C 的点满足三角形 ABC 的所谓 Pasch 公理.

对于一个平行四边形来说，我们也可定义这一平行四边形的有理点，并可证明不在平行四边形四条边上的那些有理点可分成有理内部与有理外部两部分，并且满足通常几何中由次序公理导出的有关平行四边形内外的那些性质.

以上许多论断的证明是容易的，这里一概从略。

1.4 Desargues 数系与有理数子系

一个满足公理 HI，HIV 和 D 的点与直线构成一个 Desargues 平面. 上节，我们已证明在 Desargues 平面上的任一直线上确定

了两点以后，即可确定无穷多个点与有理数系相对应，使所设两点各对应于 0 与 1. 但直线上除了这些点以外，一般还有其它的点. 以下各节，我们将证明直线上点的全体在任意取定两点以后，可引进某些运算，使之与某一具有特定性质并包含有理数在内的数系统相对应，称之为 Desargues 数系. 它将与 Desargues 平面有机地联系且为其唯一确定. 为此先定义 Desargues 数系如下：

定义 假设一个集合 **N**，其中元素之间有两种二元运算加法与乘法，满足以下 1—12 诸公理，则称 **N** 为一个 Desargues 数系，**N** 中的元素称为数.

公理分成三类.

第一类：关联公理 (N1—N6)

N1 有一个二元运算，称为加法 (+). 对于任二数 $a, b \in$ **N**，有一个确定的数 $c \in$ **N**，记作

$$c = a + b \text{ 或 } a + b = c$$

N2 对任两数 $a, b \in$ **N**，恰有一个数 $x \in$ **N**，使

$$a + x = b$$

又恰有一个数 $y \in$ **N**，使

$$y + a = b$$

N3 **N** 中有一个确定的数 0，叫作"零"，使对 **N** 中的任一个数 $a \in$ **N**，有

$$a + 0 = a \qquad 0 + a = a$$

N4 有一个二元运算称为乘法 (·). 对于任二数 $a, b \in$ **N**，有一个确定的数 $d \in$ **N**，记作

$$a \cdot b = d \text{ 或 } d = a \cdot b$$

或者把符号 · 省去，记作

$$ab = d \text{ 或 } d = ab$$

N5 对于任两数 $a, b \in$ **N**，其中 $a \neq 0$，恰有一数 $x \in$ **N**，使

$$ax = b$$

又恰有一数 $y \in$ **N**，使

$$ya = b$$

N 6 **N** 中有一个确定的数 1，叫作“幺”，使对**N**中的任一数 $a \in \mathbf{N}$，有

$$a \cdot 1 = a \qquad 1 \cdot a = a$$

第二类：计算公理（**N** 7—**N** 11）

设 a, b, c 是**N**中任意三个数，则下列计算规律恒成立：

N 7 $a + (b + c) = (a + b) + c$

N 8 $a + b = b + a$

N 9 $a(bc) = (ab)c$

N 10 $a(b + c) = ab + ac$

N 11 $(a + b)c = ac + bc$

由于公理 N 7 与 N 9，其中的括号可略去不写。

第三类：无限公理（**N** 12）

N 12 对零“0”与幺“1”视作通常自然数中的 0 与 1，并定义 $2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1$，等等，则这些数彼此都不相等。换言之，通常的自然数可视为**N**的一个子集合。

上面 N 1—N 12 等 12 条公理并不是互相独立的，例如，(见 Hilbert [4])

命题 1 从公理 N1，N2，N7 可推出公理 N3。

证 任取一固定的数 $a \in \mathbf{N}$，依公理 N1，N2 有 $x \in \mathbf{N}$，使

$$a + x = a$$

今对任一 $b \in \mathbf{N}$ 置

$$a + b = e$$

于是有

$$(a + x) + b = e$$

依公理 N7，有

$$a + (x + b) = e$$

依公理 N2 中的唯一性得

$$x + b = b$$

同样推理可知对任意 $c \in \mathbf{N}$，上述 x 满足

$$c + x = c$$

因而这一 x 即可作为公理 N3 中的 0。

命题 2 从公理 N4，N5，N9 可推出公理 N6.

证 与上命题 1 相似.

命题 3 从关联公理 N1—N6，计算公理 N7，N10，N11 可推出公理 N8.

证 对任意 a，$b \in \mathbf{N}$，先用公理 N10 再用公理 N11，有

$(a + b)(1 + 1) = (a + b)1 + (a + b)1 = (a + b) + (a+b)$ 又先用公理 N11 再用公理 N10 得

$(a + b)(1 + 1) = a(1 + 1) + b(1 + 1) = (a + a) + (b + b)$ 故

$$(a + b) + (a + b) = (a + a) + (b + b)$$

或依公理 N7 有

$$a + (b + a) + b = a + (a + b) + b$$

再依公理 N2，N7，有

$$b + a = a + b$$

即公理 N8.

以下的一些简单事实，也是容易证明的.

命题 4 依据公理 N2，N3，N8，对任意 $a \in \mathbf{N}$，有唯一的数 $x \in \mathbf{N}$，使 $x + a = a + x = 0$，此数记作 $-a$，称为 a 的负数. 负数的概念遵守通常的那些规律，例如 $-(-a) = a$. 但须注意在 Desargues 数系中，并无大小的概念也无绝对值的概念，任一数有它的负数，但数本身并无正负.

命题 5 对任意 $a \in \mathbf{N}$，有

$$0a = a0 = 0$$

证 由公理 N11 与 N3，有

$$0a + 0a = (0 + 0)a = 0a$$

故由公理 N2，有 $0a = 0$，同样 $a0 = 0$.

命题 6 对 $a \neq 0$，依公理 N5 有 $x, y \in \mathbf{N}$，使

$$xa = 1 \qquad ay = 1$$

各称为 a 的左逆与右逆，则

$$x = y$$

即 a 的左逆与右逆相等，简称为 a 的逆，记作 a^{-1}.

证 依公理 N9 与 N6，有

$$(ax)a = a(xa) = a \cdot 1 = a$$

又

$$(ay)a = 1 \cdot a = a$$

由公理 N5，得 $ax = ay$，仍由公理 N5 得 $x = y$.

命题 7 从自然数出发可依公理 N2 与 N5 定义任意正负有理数 p/q（$p_x =$ 整数，$q =$ 正整数），使之满足通常的有理数运算规律，且对任意有理数 r 与任意数 $a \in \mathbf{N}$，有

$$ra = ar$$

从最后一个命题得知，在 Desargues 数系中，可引进有理数的概念，且有理数与其它任意数之间的乘法可交换，但一般说来，任意两数的乘法不一定可交换. 此外在 Desargues 数系的有理数之间可引进大小关系，满足通常的那些性质. 但一般说来，任意两数之间并没有大小关系可言，为了今后的需要我们将扩充数系的概念，引入以下一些补充公理，是否满足这些公理将视情况而定.

乘法交换公理（N13）

N13 对 $\mathbf{N}$ 中任意两数 a, b，恒有

$$ab = ba$$

次序公理（N14—N17）

N14 设 a, b 是 $\mathbf{N}$ 中任意两个不同的数，其中恒恰有一个大于另一个. 设前者为 a，则后者 b 称为小于 a，用记号表示为

$$a > b \text{ 和 } b < a$$

对于任一数 a, $a > a$ 不成立.

N15 若 $a > b$, 且 $b > c$, 则

$$a > c$$

N16 若 $a > b$, 则恒有

$$a + c > b + c$$

N17 若 $a > b$ 且 $c > 0$, 则恒有

$$ac > bc$$

连续公理（**N**18—**N**20）

N18（阿基米德公理） 设 $a > 0$ 和 $b > 0$ 是任意两数，则恒能把 a 加上它自己，加到适当次数，使所得的和大于 b，用记号表示，即

$$\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n} > b$$

或有自然数 n，使 $na > b$.

N19（Rolle 公理） 对于系数 $c_0, c_1 \cdots, c_n$ 在 **N** 中的任意一个多项式

$$f(x) = c_0 x^n + \cdots + c_n$$

若对 **N** 中两数 $a < b$ 有 $f(a) \cdot f(b) < 0$，即 $f(a)$, $f(b)$ 都不等于 0，且一个大于 0，而另一个小于 0（或称异号），则在 **N** 中必有大于 a 且小于 b 的一数 $\xi \in \mathbf{N}$，使 $f(\xi) = 0$.

N20（完全性公理） 设 **N** 满足公理 N1—N18，则在 **N** 中不可能增加新元素（称为新数），使在扩充后的新数系中扩充原来的加法、乘法与大小关系，并使公理 N1—N18 依然成立，即在公理 N1—N18 的假定与保持下，**N** 不可能再行扩充.

以上这些公理，大体上是依照 Hilbert《几何基础》一书中的罗列与分类，仅由于本书的特殊需要而对个别公理稍作变动. 依照 Hilbert 原来的称谓，满足以上公理 N1—N20 的一部分数的集合，将称为一个复数系. 特别是满足公理 N1—N12 的复数系，我们已称之为 Desargues 数系. 这对几何的代数化以至机械化

说来是最基本的复数系． 如果应用当代通行的称法，则满足公理N1—N13 的复数系即满足乘法交换公理的 Desargues 数系，通称为域，而 Desargues 数系则通称为 Skew 域，有时亦称为体或除法环等．公理 N12 对于这些概念并不是完全必要的，但它将使我们考虑的域或体局限于特征为 0 的情形．满足诸次序公理 N13—N17 的域，现在通称为有序域，如果还满足 Roll 公理 N19，则称为实闭域，如果满足所有这些公理 N1—N20，则这一域必与通常的实数域同构． 一般说来，域与体的构造可以是非常复杂的．实数域、复数域与四元数体只是其中极为简单的几个古典实例，但具有一定的代表性．

以上这些新添入的公理也并不是互相独立的，例如无限公理N12 与 Roll 公理 N19 都可从其它公理 N1—N11，N13—N18，20 导出．此外 Hilbert 还曾证明了下面的命题（见 Hilbert 原书定理 59）：

命题 8 一个复数系 **N** 如果满足公理 N1—N16 以及阿基米德公理 N18，则这个复数系 **N** 也必满足乘法交换公理 N17，因而是一个域．

证 参阅 Hilbert 原书．

以上关于复数系中数的公理都有一定的几何背景．下面诸节与下一章，我们将说明如何从一个 Desargues 几何确定一个 Desargues 数系，与乘法交换公理相应的几何事实以及几何与复数系之间次序公理与连续公理的相应关系等． 基于 Hilbert 关于“数”的概念（见 Hilbert[4]），我们在本书中将一概改称域为数域，体为数体，其中的元素都称为数．

1.5 直线上的 Desargues 数系

满足几何公理 HI，HIV 与 D 的点与直线构成一 Desargues 平面，相应的几何称为 Desargues（平面）几何．满足上节中公理N1—N12 的复数系称为 Desargues 数系．本节以及下一节将证明

每一 Desargues 平面有一确定的 Desargues **数系**与之对应。为此先考虑在直线上引进 Desargues 数系的问题。

设 Desargues 平面上的直线 l，在其上任取两点 O 与 I。我们将作出一个 Desargues 数系 $N=N(l, O, I)$，使 l 上的点与 N 中的数一一对应，而 O 对应于 0，I 对应于 1。这时直线 l 称为数系 N 的**底线**。

为此我们把 l 上点的全体看作一个集合 N，点用大写的拉丁字母表示，而看作 N 中的元素时用相应的小写拉丁字母表示（0 与 1 除外）。在 N 中将引进加法与乘法，并证明 N 在这些加法与乘法之下构成一 Desargues 数系，且 O，I 恰与 N 中的 0 与 1 相对应。

今设 A，B 为 l 上任意两点，记作 N 中的元素 a，b。

先引进加法，即定义 $a+b \in N$ 如下。

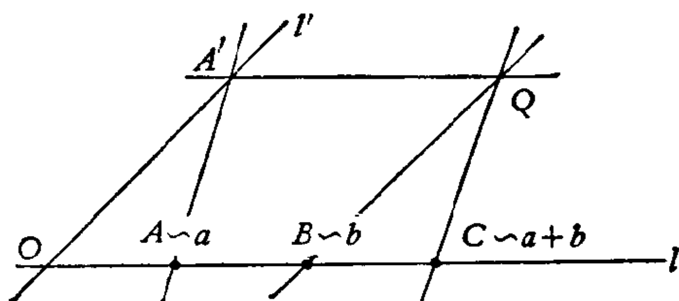


图 1.22

如图 1.22，先设 $B \neq O$。此时可过 O 任作一不同于 l 的直线 l'。在 l' 上任取一不同于 O 的点 A' 并补作一平行四边形 $OBQA'$。过 Q 作 $QC /\!/ A'A$ 而与 l 交于 C，则 C 在 N 中的对应元素 c 将定义为 $a+b$。

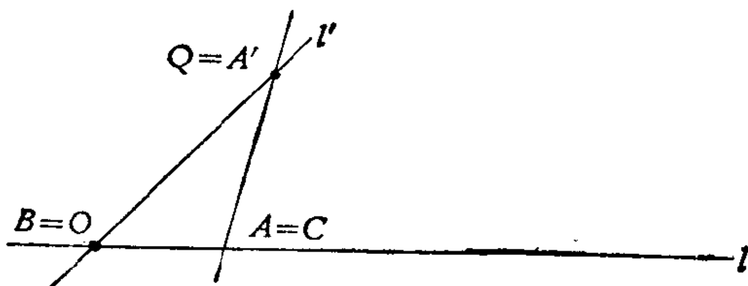


图 1.23

如图 1.23 所示，在 $B=O$ 即 $b=0$ 时，则直接定义 C 为 A，此时对应元素 $c=a$ 定义为 $a+b=a+0$. 如果我们设 $Q=A'$ 而把 $OBQA'$ 视为一退化的平行四边形，则可把现在的直接定义归结为上面定义的一种退化情形.

首先需证明这样定义的加法是合理的，即需证明所定的 C 点与 l' 以及 A' 的选取无关. 在 $B=O$ 时，$C=A$ 与 l'，A' 的选取无关是显然的，故只需考虑 $B\neq O$ 的情形.

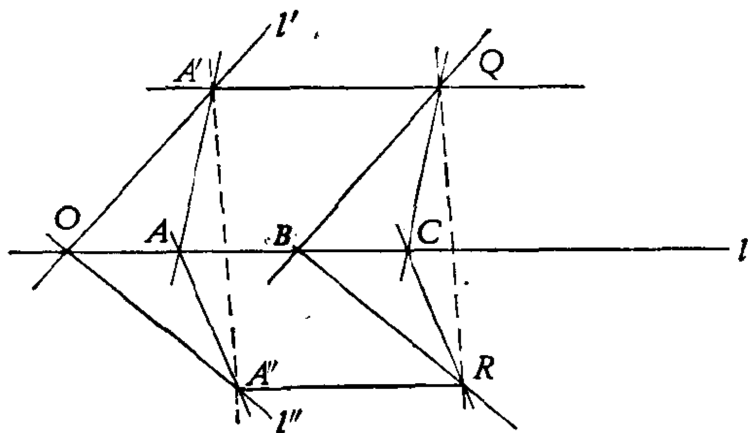


图 1.24

如图 1.24，试过 O 任作另一与 l 不同的直线 l''，在其上任取一点 A''，并补作一平行四边形 $OBRA''$. 我们只需证 $RC /\!/ AA'$ 即可.

证明要反复应用 Desargues 公理. 首先注意在 Desargues 公理的叙述中，三角形与平行线都依照 1.1 和 1.2 节那样来定义. 因而凡提到三角形时，三个顶点必须不在一直线上，且更无两个顶点重合，而平行线也必须是不相同的直线. 同样，平行四边形也依照 1.2 节的定义2.

今先设 l'' 不同于 l'，且 A', A, A'' 不在一直线上，$A'A''$ 也不平行 l. 这时 $OA'A''$, $AA'A''$, BQR, CQR 都是三角形. 应用 Desargues 公理 D_2 于 $\triangle OA'A''$ 与 $\triangle BQR$. 由于这时三角形对应顶点的连线 OB, $A'Q$, $A''R$ 都互相平行，且三角形两组对应边 $OA' /\!/ BQ$, $OA'' /\!/ BR$，故有 $A'A'' /\!/ QR$. 再应用 Desargues 公理 D_2 于 $\triangle AA'A''$ 与 $\triangle CQR$，则诸顶点连线仍互相平行，且

两组对应边 $AA'/\!/CQ$，$A'A''/\!/QR$，故有 $AA''/\!/CR$. 即所欲证.

在 l'' 与 l' 相同，或虽不同而 A', A, A'' 在一直线上，或 $A'A''/\!/l$ 时，则不能象上面那样应用 Desargues 公理，而需另行处理. 其过程颇为烦琐，但却是完全必要的，理由仍见第三章 3.1 节. 由于其处理过程与 1.2 节中某些证明相仿故将略去.

由 $a+b$ 的定义可见，若命 O 所对应 N 中的元素为 0，则有 $a+0=a$，$0+a=a$，即 0 符合 Desargues 数系中 0 元素的作用，见 1.4 节中的公理 $N3$.

其次试定义 $a\cdot b$ 或 $ab\in N$.

在定义 $a+b$ 时，I 点实际上不起作用，但在定义 ab 时，I 点是不可少的

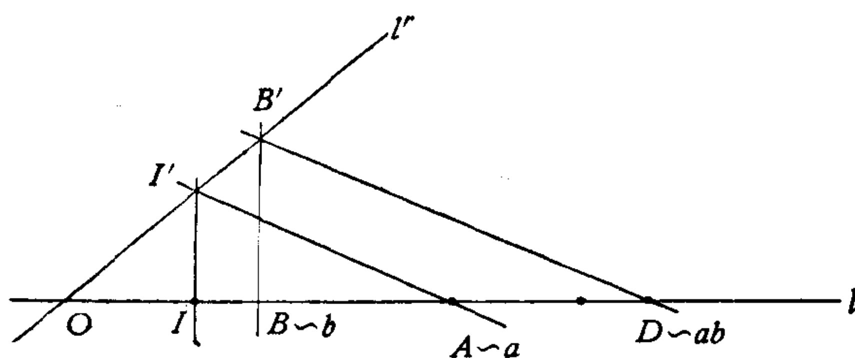


图 1.25

今定义 ab 如下. 如图 1.25，过 O 任取一不同于 l 的直线 l'，在 l' 上任取一不同于 O 的点 I'. 今对 l', I' 依下法在 l 上定一点 D 以作为 ab：先设 $A\neq O, B\neq I$，此时可过 B 作 $BB'/\!/II'$ 交 l' 于 B'. 由于 B' 不能在直线 $I'A$ 上，故又可作 $B'D/\!/I'A$ 与 l 交于 D. 点 D 所对应 N 中的元素 d 即定义为 ab：$d=ab$. 若 $A=O$ 或 $B=I$，则上述作法失效，但可定义 $D=A$，即 $0\cdot b=0$，$a\cdot 1=a$. 如果把两条重合的直线看作是两条退化的平行线，则在 $A=O$ 或 $B=I$ 时 ab 的定义也可归结为 $A\neq O, B\neq I$ 时定义的退化情形，见图 1.26.

首先需证明上面定义的乘法是合理的，即所得 D 点与 l', I' 的

选取无关．在 $A=O$或 $B=I$ 时甚为显然，故以下的证明将局限于 $A\neq O$且 $B\neq I$ 的情形．

如图 1.27，试过O任作另一与 l ，l'不同的直线 l''，并在 l'' 上任取一点 I''．我们将先设 I'' 不在直线 $I'I$ 也不在直线 $I'A$ 上．过B作 $BB''/\!/II''$ 与l''交于 B''．我们的目的在于证明 $B''D/\!/I''A$．

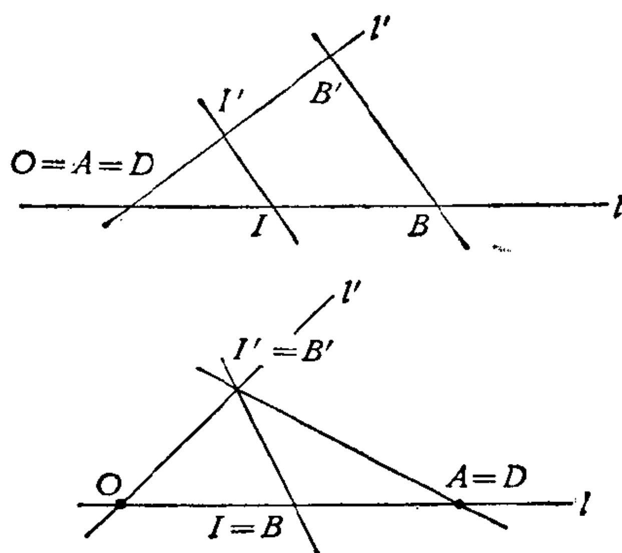


图 1.26

在以上这些条件下可以应用 Desargues 公理 D_2 于 $\triangle II'I''$ 与 $\triangle BB'B''$，得 $I'I''/\!/B'B''$．再应用 Desargues 公理 D_2 于 $\triangle AI'I''$ 与$\triangle DB'B''$，即得 $B''D/\!/I''A$，如所欲证．在不符合这些条件的情形下，仍须逐一个别处理，其理由同前．不论何时都易验证 $B''D/\!/I''A$，因而D的确定恒与 l''，I'' 的选取无关，因此保证了乘法定义的合理性．

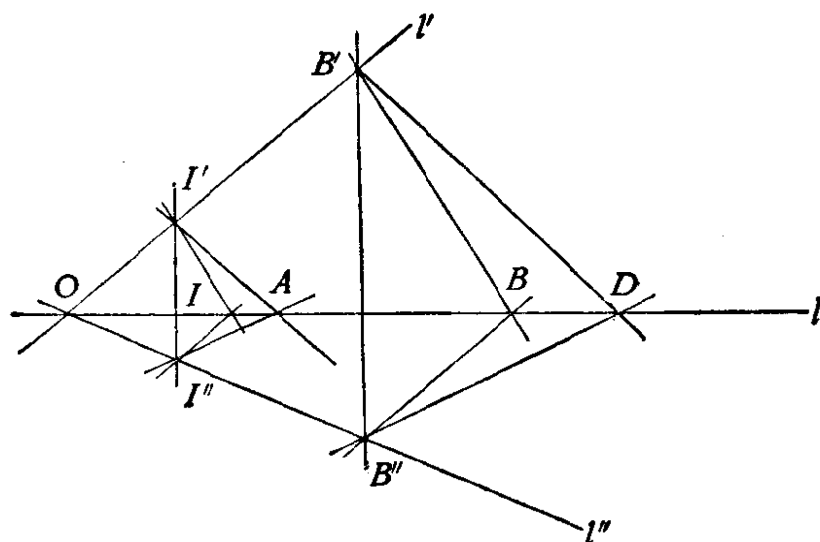


图 1.27

依据定义直接有 $1\cdot a=a$，又易见有 $a\cdot 1=a$．因而与I相应的元素 1 的作用相当于复数系公理 **N6** 中的元素 1，在符号上

不致产生混淆.

在上面N中已定义元素0与1以及加法与乘法运算的情况下，反复应用 Desargues 公理，可证N满足 Desargues 数系的所有公理 N1—N12，证明是冗长的，有时也并不容易. 这些证明都可见于 Hilbert 的经典著作《几何基础》. 但需注意 Hilbert 的证明中只写出了一般的情形，而对于退化的情形也是有必要考虑的，其理由仍见第三章 3.1 节. 因此要把证明完全写出实际上比原来还要烦琐得多. 我们将把这些证明一概略去，而仅给出逆元素等几个特殊问题的补充说明. 至于公理 N1—N12 中的那些证明，则仍可参阅 Hilbert [2].

逆元素存在的直接证明

如图 1.28，设 l, O, I 如前，而A在l上不等于O, I，对应于N中的数 $a \neq 0, 1$. 过O任作不同于l的直线l'并在上任取一点$I' \neq O$. 过A作 $AA' \parallel II'$ 与l'交于A'，又过I'作 $I'X \parallel A'I$ 与l交于X，对应于N中的数x. 依乘法定义有 $xa = 1$，即x是a的左逆. 其次过I作 $IY' \parallel AI'$ 与l'交于Y'，又过Y'作 $Y'Y \parallel I'I$ 与l交于Y，对应于N中的数y. 依乘法定义有 $ay = 1$，即y是a的右逆. 试证 $x = y$，即左逆与右逆相同如次.

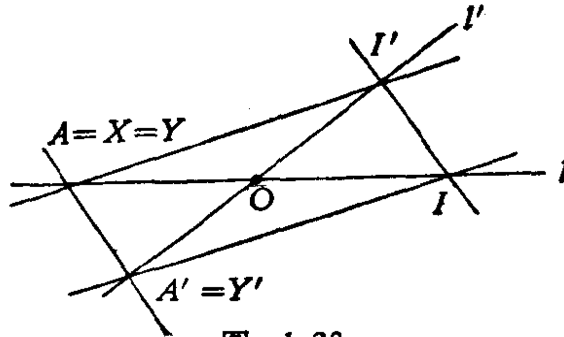


图 1.28

先考虑 $IA' \parallel I'A$ 的情形. 此时 $I'X$ 与 $I'A$ 重合，X与A重合，又 IY' 与 IA' 重合，Y'与A'重合，因而 $Y'Y$ 与 $A'A$ 重合，Y与A即X重合，而有 $x = y$.

如图 1.29 再设 IA' 不平行于 $I'A$ 因而交于一点，设为 P. 于是 $IY', I'X$ 也不能平行而交于一点，设为Q. 应用 Desargues

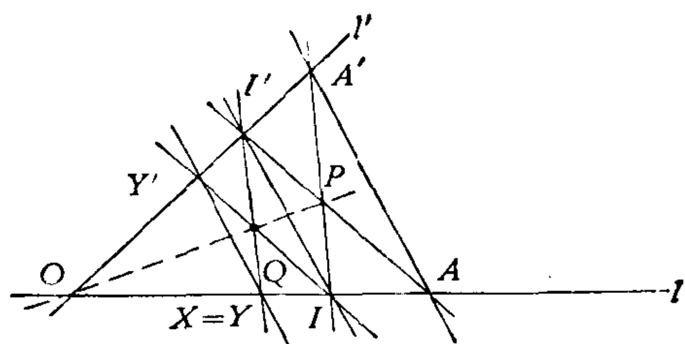


图 1.29

公理 D_1 于 $\Delta II'Q$ 与 $\Delta AA'P$，可知 PQ 直线通过O点．再应用 Desargues 公理 D_2 于 $\Delta PII'$ 与 $\Delta QXY'$，可知 $II'/\!/XY'$．因而直线 XY' 与 YY' 重合，而X与Y重合，即 $x=y$．如所欲证．

以上设 $A\neq O, I$．若 $A\neq O$ 而 $A=I$，则 $a=1$ 的逆元素显为 1 自身．

中点概念

设直线 l 与 O, I 如前，A，B 为 l 上任意两点，各对应于 N中的数 a 与 b．设M是点偶(AB)的中点，对应于数 m，则必有

$$m=\frac{1}{2}(a+b)$$

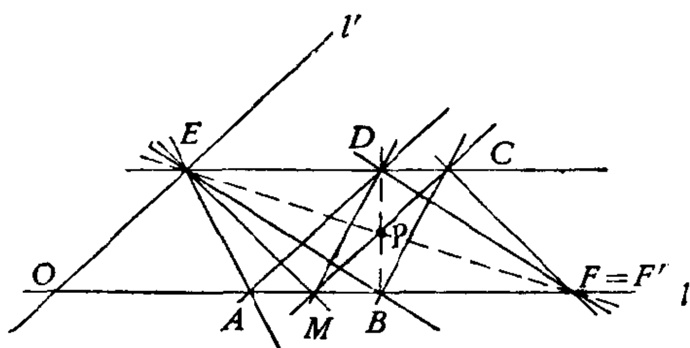


图 1.30

为证此，可设 A，B，O，M 都不相同(有相同者时可直接验证)．如图 1.30，此时可作 $\square AMCD$．由于B是A对M的对称点，故由定义知 $CB/\!/DM$．今过O作 $l'/\!/AD/\!/MC$．命 CD 与

l' 交于 E. 过 D 作 $DF /\!/ EB$ 与 l 交于 F. 则按加法定义, F 对应于N中的数 $b + a$, 或由公理 **N8** 即 $a + b$. 其次过 C 作 $CF' /\!/ EM$ 与 l 交于 F', 则按定义 F' 对应于数 $2m$.

从 1.2 节的一条定理, ▱$MBCD$ 的对角线 MC 与 BD 应互相平分于点偶 (BD) 与 (MC) 的共同中点, 设为 P. 同样, 由 ▱$BFDE$, 对角线 EF 与 BD 也互相平分, 特别有 EF 经过 P. 由 ▱$MF'CE$ 也同样有 EF' 经过 P 点. 因而 EF 与 EF' 重合, F 与 F' 重合而有 $2m = a + b$.

全合概念

设 l 上四点 A, B, C, D 各对应于 N 中的 a, b, c, d. 依 1.3 节定义点偶

$$(AB) \equiv (CD)$$

相当于点偶 (BC) 与 (AD) 有相同中点 M. 由中点概念知应有

$$2m = b + c = a + d$$

由此知 $(AB) \equiv (CD)$ 的条件为

$$b - a = d - c$$

1.6 Desargues 平面的附属 Desargues 数系

设由 Desargues 平面中任取一直线 l 及其上两不同点 O, I. 以 O, I 作为 0 与 1, 依 1.5 节可定义一 Desargues 数系 $N = N(l, O, I)$. 本节目的在于证明这一 Desargues 数系实际上与 l, O, I 的选择无关, 而由 Desargues 平面所唯一确定, 换言之有下述定理:

定理 1 在直线 l 上任取两点 $O \neq I$ 以之作为 0 与 1, 依 1.5 节所定义的 Desargues 数系 N 与 l 以及 O 与 I 的选取无关.

证 在平面上另取一直线 l' 以及其上两不同点 O' 与 I', 以之作为 0 与 1, 以定义 Desargues 数系 $N' = N(l', O', I')$. 定理意指 N 与 N' 同构, 即有一一对应

$$F:N \to N'$$

使在 F 下 0 与 0 对应，1 与 1 对应，而保持了数系的加法与乘法，即对任意 $a, b \in N$，有

$$F(a+b) = F(a) + F(b)$$
$$F(a \cdot b) = F(a) \cdot F(b)$$

为证此，将分若干情形分别进行讨论.

第一种情形：l 与 l' 相交于一点 $O = O'$，见图 1.31。

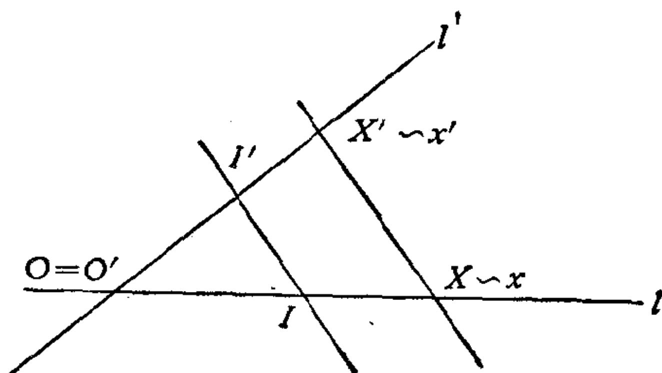


图 1.31

对 l 上任一点 X，在 $X \neq I$ 时试作 $XX' /\!/ II'$ 与 l' 交于 X'，在 $X = I$ 时，即取 $X' = I'$。若 X 对应于数 $x \in N$，则 X' 在 N' 中所对应的数将记作 x'。今依

$$F(x) = x'$$

定义对应关系

$$F:N \to N'$$

特别有

$$F(0) = 0' \qquad F(1) = 1'$$

即 N' 中的 0 与 1．于是定理相应于对任意 $a, b \in N$ 有

$$(a+b)' = a' + b'$$

与

$$(ab)' = a'b'$$

先证 $(a+b)' = a' + b'$ 如下．

设 A, B 在 l 上各对应于 $a, b \in N$，又 A', B' 在 l' 上各对应于 $a', b' \in N'$． 在 $A = B$ 又在 A 或 $B = O$ 时，$(a+b)' =$

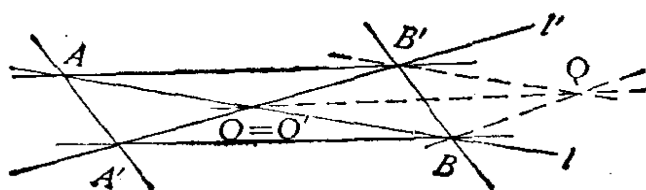


图 1.32

$a'+b'$ 甚显然. 故以下将设 A, B, O 都不相同.

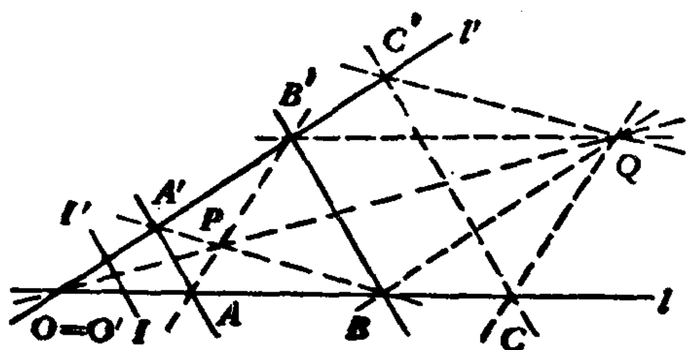


图 1.33

如图 1.32或1.33,此时有 $AA'/\!/II', BB'/\!/II'$.今作 $\square OBQB'$,又过Q作 $QC/\!/AB', QC'/\!/A'B$ 各与 l, l' 交于 C, C'. 则依 N, N' 中加法定义, C, C' 各对应于 $a+b\in N$, $a'+b'\in N'$.

因 $\triangle OAA'$ 与 $\triangle QB'B$ 的三组对应边互相平行, 故依 Desargues 公理 D_1, OQ, AB', $A'B$ 互相平行,或交于同一点P. 对于前一情形,有 $C=C'=O=O'$. 故 $a'+b'=0'=(a+b)'$. 如所欲证. 对于后一情形, $\triangle QCC'$ 与 $\triangle PAA'$ 中, 对应顶点的连线共过O点, 而 $QC/\!/PA$, $QC'/\!/PA'$, 因而 $CC'/\!/AA'$. 故 $CC'/\!/II'$ 而仍有 $(a+b)'=a'+b'$.

次证 $(ab)'=a'b'$ 如下.

记 A, A', B, B' 如前. 在 $A=B$ 或 A, B 之一与O或I相同时, $(ab)'=a'b'$ 容易验证, 故以下将设 A, B, O, I 都不相同.

作 $B'D/\!/I'A$ 与 l 交于D,又作 $BD'/\!/IA'$ 与 l' 交于D',则D对应于 $ab\in N, D'$ 对应于 $a'b'\in N'$. 先设 IA' 不与$I'A$平行,因而二者交于一点,设为P. 如图 1.34, 此时 BD' 也不与 $B'D$ 平

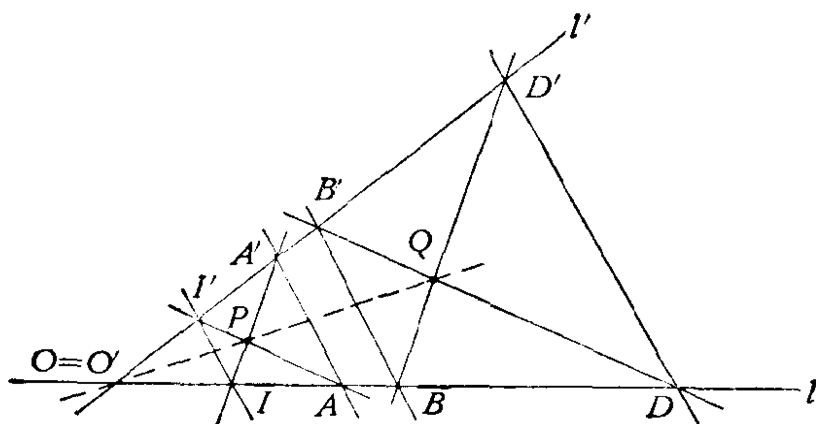


图 1.34

行而交于一点，设为 Q. 应用 Desargues 公理 D_1 于 $\Delta II'P$ 与 $\Delta BB'Q$，可知 PQ 应通过 O 点. 再应用 Desargues 公理 D_2 于 $\Delta PAA'$ 与 $\Delta QDD'$，可知 $DD'/\!/AA'$. 因而 $DD'/\!/II'$ 而有 $(ab)'=a'b'$. 如所欲证.

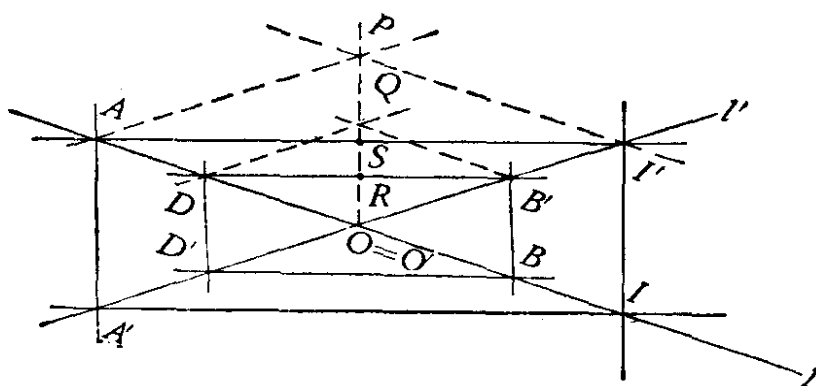


图 1.35

次设 $IA'/\!/I'A$. 上面的证明失效，故须重新证明. 如图 1.35，为此过 A 作直线平行于 l'，又过 I' 作直线平行于 l，二者交于 P. 过 B' 作 $B'Q/\!/l$ 与 OP 交于 Q. 应用 Desargues 公理 D_2 于 $\Delta PAI'$ 与 $\Delta QDB'$，可知 $PA/\!/QD$. 故 $QD/\!/l'$ 而 $OB'QD$ 是平行四边形. 应用 1.2 节的定理于 $\square OB'QD$，$\square OI'PA$ 和 $\square AA'II'$，可知诸相应对角线的交点 R 是 B', D 的中点，S 是 A, I' 的中点，O 是 A, I 的中点. 从 $\Delta AII'$ 得知两边上中点的连线 $OS/\!/$

II'. 由此知 $\triangle DBB'$ 中 R 是 $B'D$ 的中点，且 $OR /\!/ BB'$，因而 O 是 B, D 的中点. 交换 l, l' 知也应有 O 是 B', D' 的中点. 从 $\triangle B'DD'$ 即知 $DD' /\!/ OR$，因而 $DD' /\!/ BB' /\!/ II'$，而仍有 $(ab)' = a'b'$.

这一直接的几何证明过于纡曲，实际上可应用已知数系的性质简证如下. 由 1.4 节的命题 4 与 1.5 节的中点概念知 $a = -1$，$a' = -1'$，因而 D 对应于 $ab = (-1)b = -b$，D' 对应于 $a'b' = (-1')b' = -b'$. 由前已证明的关于对应 F 保持加法运算的结果知

$$(-b)' + b' = ((-b) + b)' = 0'$$

故

$$(-b)' = -b'$$

或

$$(ab)' = a'b'$$

如所欲证.

同样，在证明 $(a+b)' = a' + b'$ 时，对于 $AB' /\!/ A'B$ 的情形也可将直接的几何证明易为数系性质的简证. 比较这里的两种证明方法，即从几何公理出发的几何直接证明与根据数系性质的代数证明，前者的添线不易想到，论证步骤无据可循，而后者依据计算容易找到思考规律，因此为证明的机械化提供了可能性. 这里所举的只是比较原始的实例.

第二种情形：$l /\!/ l'$ 且 $II' /\!/ OO'$.

对 l 上任一点 $X \neq O$ 作 $XX' /\!/ OO'$ 与 l' 交于 X'. 若 X, X' 各对应于 $x \in N$ 与 $x' \in N'$，则定义

$$F: N \to N'$$

为

$$F(x) = x'$$

又置

$$F(0) = 0'$$

于是在 F 下，N 中的 0，1 各与 N' 中的 0，1 对应，即

$$F(0)=0' \qquad F(1)=1'$$

今在 l 上任取 A, B 各对应于 a, b，又在 l' 上取 A', B' 各对应于 $a', b' \in N'$，于是 AA', BB' 都与 OO' 或 II' 平行. 须证

$$(a+b)'=a'+b'$$
$$(ab)'=a'b'$$

先证 $(a+b)'=a'+b'$. 在 A 或 B 等于 O 时甚为显然，故可设 A, B 都不等于 O.

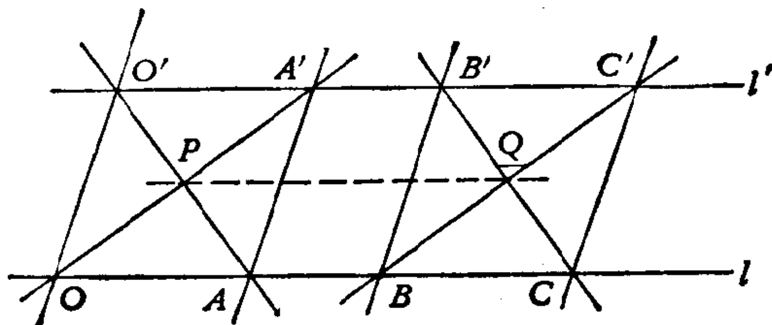


图 1.36

如图 1.36，作 $B'C /\!/ O'A$ 与 l 交于 C，则因 $OBB'O'$ 是平行四边形，故依加法定义 C 即对应于 $a+b \in N$. 同样，若过 B 作 $BC' /\!/ OA'$ 与 l' 交于 C'，则 C' 对应于 $a'+b' \in N'$. 命 ▱$OAA'O'$ 对角线的交点为 P. 因 $BC', B'C$ 各与 $OA', O'A$ 平行，因而也必相交于一点，设为 Q. 应用 Desargues 公理 D_1 于 $\triangle POO'$ 与 $\triangle QBB'$，可知 $PQ /\!/ l /\!/ l'$. 再应用 Desargues 公理 D_2 于 $\triangle PAA'$ 与 $\triangle QCC'$，可知 $CC' /\!/ AA'$. 因而 $CC' /\!/ OO'$ 或即 $(a+b)'=a'+b'$. 如所欲证.

次证 $(ab)'=a'b'$ 如下.

若 B 等于 I 或 O，因而 B' 等于 I' 或 O' 时，等式是显然成立的，以下设 $B \neq I, B \neq O$，同样可设 $A \neq I, O$.

如图 1.37，此时 BI' 与 OO' 交于一点 E'. 过 I 作 $IE /\!/ BE'$ 与 OO' 交于 E. 应用 Desargues 公理 D_2 于 $\triangle IAE$ 与 $\triangle I'A'E'$，可知 $AE /\!/ A'E'$，因而依乘法定义可知 $A'E'$ 与 l 的交点 D 即对应于 $ab \in N$. 今过 B' 作 $B'F /\!/ I'E'$ 与 OO' 交于 F，又过 F 作

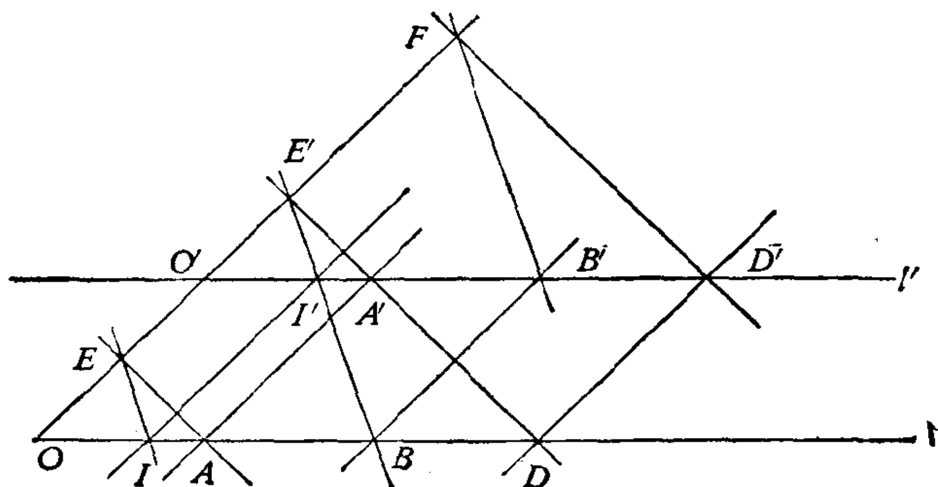


图 1.37

$FD' \parallel A'E'$ 与 l' 交于 D'，则依乘法定义，D' 即对应于 $a'b' \in N'$. 应用 Desargues 公理 D_1 于 $\triangle BDE'$ 与 $\triangle B'D'F$，可知 $DD' \parallel BB'$. 因而 $DD' \parallel OO'$ 或即 $(ab)' = a'b'$. 如所欲证.

第三种情形：l 与 l' 不重合，不平行，且 l 与 l' 的交点不等于 O 与 O'.

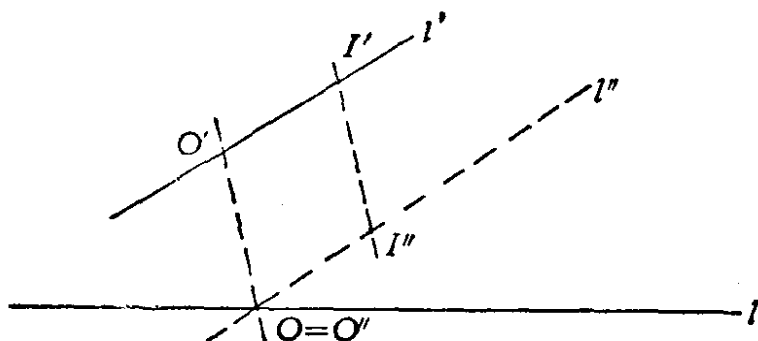


图 1.38

如图 1.38，此时可过 O 作直线 $l'' \parallel l'$，并在 l'' 上取 I''，使 $I'I'' \parallel O'O$. 置 $O = O''$. 在 l'' 上以 O''，I'' 为 0 与 1 作 Desargues 数系 N''. 则由情形 1，N 与 N'' 同构，设此同构为 $\bar{F}: N \to N''$，而 $\bar{F}(0) = 0''$，$\bar{F}(1) = 1''$. 又依情形 2，有同构 $\bar{F}': N'' \to N'$ 使 $\bar{F}'(0'') = 0'$，$\bar{F}'(1'') = 1'$. 由此知 N 与 N' 在 $\bar{F}'\bar{F}$ 下同构且使 0，1 彼此对应.

显然一般情形都可至多假助于一第三直线而归结于以上三种

情形．至此定理完全得证．

定理 1 已证明了任两直线 l, l' 所定两个 Desargues 数系彼此同构，即

$$F: N(l, O, I) \approx N(l', O', I')$$

不仅如此，我们还将证明下面的定理．

定理 2 上式中的同构 F 可以唯一的方式确定，即两 Desargues 数系间有确定的（canonical）同构存在．

为证此，请先注意在定理 1 的证明中，用到了两种类型的同构对应关系．它们相当于证明中的第一种情形与第二种情形，各记之为 F_{I} 与 F_{II}．在第一类同构对应 F_{I} 中，l, l' 是两不同直线，相交于 $O = O'$．在第二类同构对应 F_{II} 中，l, l' 是两不同的平行直线，其中 $OO' /\!/ II'$．今设有一串连结两 Desargues 数系 N 与 N' 的同构对应：

$$N = N(l, O, I) \underset{\approx}{\overset{F_1}{\rightarrow}} N(l_1, O_1, I_1) \underset{\approx}{\overset{F_2}{\rightarrow}} N(l_2, O_2, I_2)$$

$$\underset{\approx}{\rightarrow} \cdots \underset{\approx}{\overset{F_n}{\rightarrow}} N(l_n, O_n, I_n) \underset{\approx}{\overset{F'}{\rightarrow}} N(l', O', I') = N'$$

则欲证明定理，显然只需证明不论中间的同构为 F_{I} 还是 F_{II}，最后所得的结果 $F'F_n \cdots F_2F_1$ 都相同即可．

在证定理 2 之前，先分述若干简单的论断如下．

1．相继两不同类型的同构对应实施的先后次序可以颠倒，即 $F_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{II}} = F'_{\mathrm{II}}F'_{\mathrm{I}}$．

详言之如下．

设

$$F_{\mathrm{II}}: N(l_1, O_1, I_1) \approx N(l_2, O_2, I_2)$$

为第 II 类同构，又设

$$F_{\mathrm{I}}: N(l_2, O_2, I_2) \approx N(l_3, O_3, I_3)$$

为第 I 类同构．如图 1.39，过 O_1 作 $l_4 /\!/ l_3$，又过 I_3 作 $I_3I_4 /\!/ O_1O_2 /\!/ I_1I_2$ 与 l_4 交于 I_4，则有第 I 类同构

$$F'_{\mathrm{I}}: N(l_1, O_1, I_1) \approx N(l_4, O_4, I_4)$$

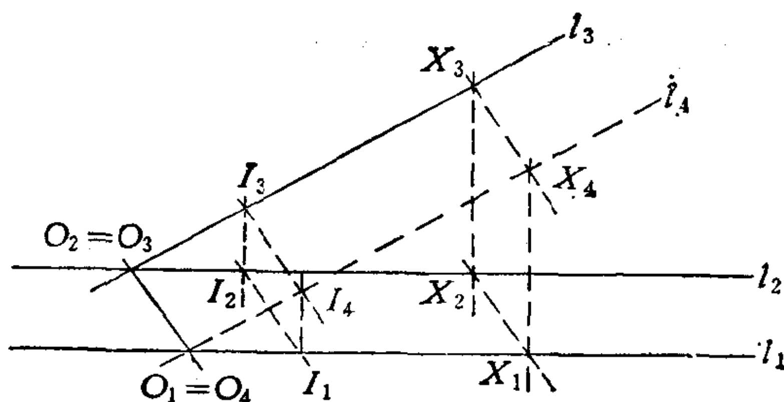


图 1.39

这里 $O_4=O_1$. 又有第II类同构

$$F'_{\text{II}}:N(l_4,\ O_4,\ I_4)\approx N(l_3,\ O_3,\ I_3)$$

我们将证 $F_{\text{I}}F_{\text{II}}$ 的次序可颠倒为 $F'_{\text{II}}F'_{\text{I}}$.

若 $I_1,\ I_2,\ I_3$ 在同一直线上,则 I_4 也在这一直线上. 这时

$$F_{\text{I}}F_{\text{II}}=F'_{\text{II}}F'_{\text{I}}:N(l_1,\ O_1,\ I_1)\approx N(l_3,\ O_3,\ I_3)$$

甚为显然,故以下将设 $I_1,\ l_2,\ I_3$ 不在同一直线上.

应用 Desargues 公理 D_2 于 $\triangle O_1I_1I_4$ 与 $\triangle O_2I_2I_3$, 得 $I_1I_4/\!/I_2I_3$. 今过 l_1 上任一点 $X_1(\neq O_1,\ I_1)$ 作 $X_1X_2/\!/O_1O_2$, 交 l_2 于 X_2; 过 X_2 作 $X_2X_3/\!/I_2I_3$, 交 l_3 于 X_3; 又过 X_3 作 $X_3X_4/\!/I_3I_4$, 交 l_4 于 X_4. 应用 Desargues 公理 D_2 于 $\triangle O_4X_1X_4$ 与 $\triangle O_3X_2X_3$, 得 $X_1X_4/\!/X_2X_3$, 因而也平行于 I_2I_3 和 I_1I_4. 由定义知

$$F_{\text{II}}(X_1)=X_2\qquad F_{\text{I}}(X_2)=X_3$$
$$F'_{\text{I}}(X_1)=X_4\qquad F'_{\text{II}}(X_4)=X_3$$

故对 $X_1\neq O_1,\ I_1$ 有

$$F_{\text{I}}F_{\text{II}}(X_1)=F'_{\text{II}}F'_{\text{I}}(X_1)=X_3$$

在 $X_1=O_1,\ I_1$ 时上式更为显然 $(X_3=O_1,\ I_1)$, 故

$$F_{\text{I}}F_{\text{II}}=F'_{\text{II}}F'_{\text{I}}$$

同样,若有相继两不同类型的同构对应 $F_{\text{II}}F_{\text{I}}$, 则必有 F'_{I} 与 F'_{II}, 使 $F_{\text{II}}F_{\text{I}}=F'_{\text{I}}F'_{\text{II}}$. 这就证明了1.

2. 相继实施两第I类型的同构对应

$$F_{\text{I}}:N(l_1,\ O_1,\ I_1)\approx N(l_2,\ O_2,\ I_2)$$

与

$$F'_{\mathrm{I}}:N(l_2,\ O_2,\ I_2)\approx N(l_3,\ O_3,\ I_3)$$

在 l_1, l_3 不同时，可合并为一第 I 类型的同构对应

$$F''_{\mathrm{I}}=F'_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}}:N(l_1,\ O_1,\ I_1)\approx N(l_3,\ O_3,\ I_3)$$

证明甚易，故从略，可参阅附图 1.40。

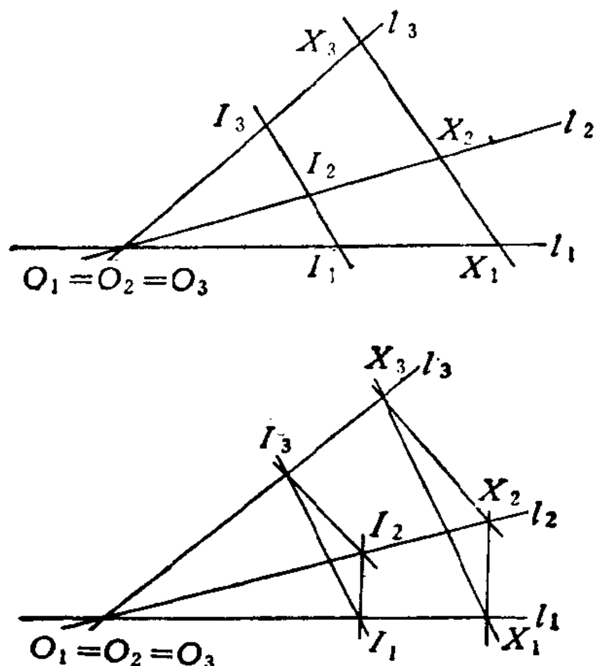


图 1.40

3. 相继实施两第 II 类同构对应

$$F_{\mathrm{II}}:N(l_1,\ O_1,\ I_1)\approx N(l_2,\ O_2,\ I_2)$$

与

$$F'_{\mathrm{II}}:N(l_2,\ O_2,\ I_2)\approx N(l_3,\ O_3,\ I_3)$$

在 l_1, l_3 不同时，可合并为一第 II 类的同构对应

$$F''_{\mathrm{II}}=F'_{\mathrm{II}}F_{\mathrm{II}}:N(l_1,\ O_1,\ I_1)\approx N(l_3,\ O_3,\ I_3)$$

证明参阅图 1.41。

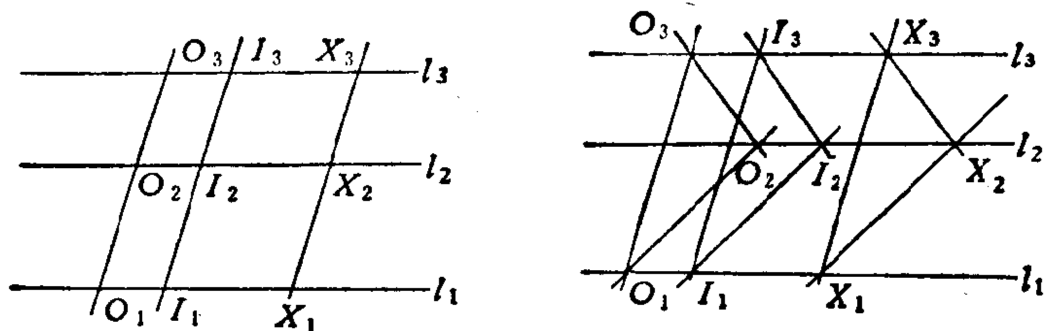


图 1.41

4. 设相继两第 I 类同构对应

$$F_{\mathrm{I}}:N(l_1,\ O_1,\ I_1)\approx N(l_2,\ O_2,\ I_2)$$

$$F'_{\mathrm{I}}:N(l_2,\ O_2,\ I_2)\approx N(l_3,\ O_3,\ I_3)$$

其中 $O_1=O_2=O_3$，而始末两底线相同，即 $l_1=l_3$，则中间的底线 l_2 与 I_2 可任意易为另一底线 l_4 与 I_4。即作同构对应

$$F_{\mathrm{I}}'':N(l_1,\ O_1,\ I_1)\approx N(l_4,\ O_4,\ I_4)$$
$$F_{\mathrm{I}}''':N(l_4,\ O_4,\ I_4)\approx N(l_3,\ O_3,\ I_3)$$
其中 $O_4=O_1$ 时,应有
$$F_{\mathrm{I}}'F_{\mathrm{I}}=F_{\mathrm{I}}'''F_{\mathrm{I}}''$$

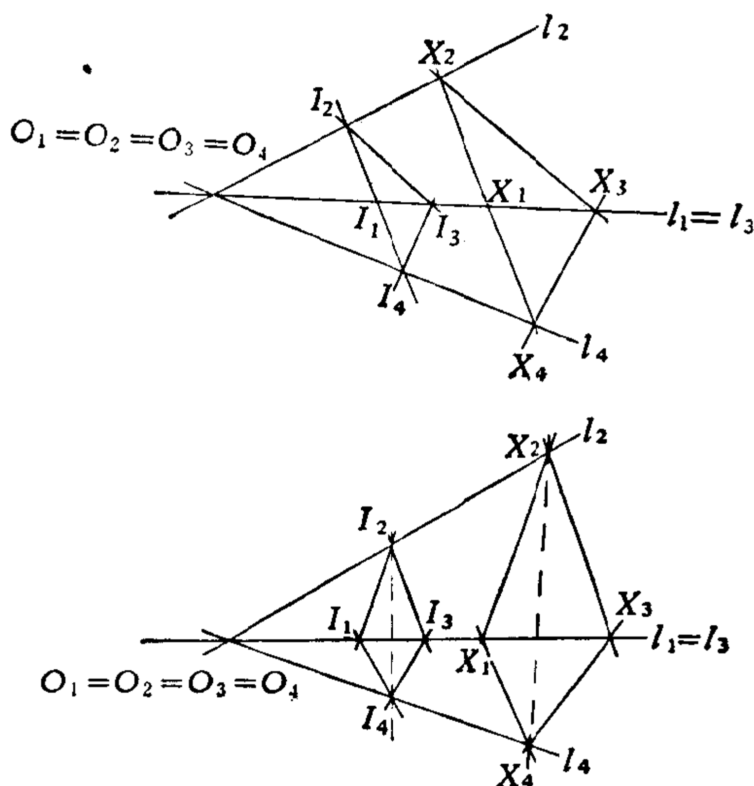


图 1.42

证明可参阅附图 1.42. 若 $X_1,\cdots,X_4$ 各在 $l_1,\cdots,l_4$ 上,而 $X_1X_2/\!/I_1I_2$, $X_2X_3/\!/I_2I_3$, $X_1X_4/\!/I_1I_4$, 则应用 Desargues 公理可得 $X_3X_4/\!/I_3I_4$, 故
$$F_{\mathrm{I}}'F_{\mathrm{I}}(X_1)=F_{\mathrm{I}}'''F_{\mathrm{I}}''(X_1)=X_3$$
即 $F_{\mathrm{I}}'F_{\mathrm{I}}$ 与中间 l_2, I_2 的选择无关.

我们称 $F_{\mathrm{I}}'F_{\mathrm{I}}$ 为第 III 类同构对应,记作 F_{III} 等.

5. 设相继两第 II 类同构对应
$$F_{\mathrm{II}}:N(l_1,\ O_1,\ I_1)\approx N(l_2,\ O_2,\ I_2)$$
$$F_{\mathrm{II}}':N(l_2,\ O_2,\ I_2)\approx N(l_3,\ O_3,\ I_3)$$
其中 $l_1/\!/l_2$, $l_2/\!/l_3$, 而 $l_3=l_1$, 则中间的底线 l_2 与 O_2 可任意易为另一底线 l_4 与 O_4. 这时

$$F'_{\text{II}}F_{\text{II}}:N(l_1,\ O_1,\ I_1)\approx N(l_3,\ O_3,\ I_3)$$

称为第 IV 类同构对应，记作 F_{IV}，F'_{IV}，等等。

证明与(4)相仿，见图 1.43.

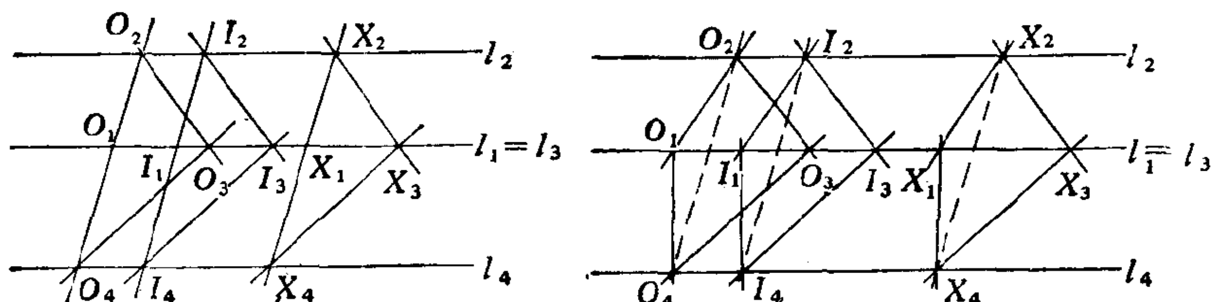


图 1.43

6. 相继实施两第 III 类型的同构对应

$$F_{\text{III}}:N(l_1,\ O_1,\ I_1)\approx N(l_1,\ O_2,\ I_2)$$
$$F'_{\text{III}}:N(l_1,\ O_3,\ I_3)\approx N(l_1,\ O_4,\ I_4)$$

其中 $O_1=O_2=O_3=O_4$，$I_2=I_3$，可合并为一第 III 类型的同构对应。

盖依 4，我们可取过 O_1 的与 l_1 不同且又彼此不同的直线 l_5 与 l_6，并在上取 I_5 与 I_6，又置 $O_5=O_6=O_1$，使

$$F_{\text{III}}=F_{\text{I}}^*F_{\text{I}}\qquad F'_{\text{III}}=F_{\text{I}}'^*F'_{\text{I}}$$

这里

$$F_{\text{I}}:N(l_1,\ O_1,\ I_1)\approx N(l_5,\ O_5,\ I_5)$$
$$F_{\text{I}}^*:N(l_5,\ O_5,\ I_5)\approx N(l_1,\ O_2,\ I_2)$$
$$F'_{\text{I}}:N(l_1,\ O_3,\ I_3)\approx N(l_6,\ O_6,\ I_6)$$
$$F_{\text{I}}'^*:N(l_6,\ O_6,\ I_6)\approx N(l_1,\ O_4,\ I_4)$$

都是第 I 类型的同构对应。今依(2)，$F'_{\text{I}}F_{\text{I}}^*$ 为一第 I 类型的同构对应，同样，$(F'_{\text{I}}F_{\text{I}}^*)F_{\text{I}}$ 亦为一第 I 类型的同构对应，于是 $F'_{\text{III}}F_{\text{III}}=F_{\text{I}}'^*((F'_{\text{I}}F_{\text{I}}^*)F_{\text{I}})$ 为一第 III 类型的同构对应。

同样可得：

7. 相继实施两第 IV 类型的同构对应可合并为一第 IV 类型

的同构对应.

今可如下作出定理 2 的证明.

设给出一串由 I, II 两种类型的同构对应相继实施所得的对应

$$F: N(l, O, I) \approx N(l', O', I')$$

依据 1，颠倒这一串中第 I 与第 II 类型的同构对应的次序，可使 F 成为先实施一串第 II 类型的同构对应再实施第 I 类型的同构对应的组合. 依据 2 与 6，可将一串第 I 类型的同构对应的组合合并为一第 I 或第 III 类型的同构对应. 同样依据 3 与 7，可将一串第 II 类型的同构对应的组合合并为一第 II 或第 IV 类型的同构对应. 因此，原来的 F 必可等同为以下八种类型的同构对应之一:

$$F_{I},\ F_{II},\ F_{III},\ F_{IV},\ F_{I}F_{II},\ F_{I}F_{IV},\ F_{III}F_{II},\ F_{III}F_{IV}$$

今记恒同同构为 F_0，并设以上八种同构对应中的 F_{III}，F_{IV} 都非恒同同构，则原来的同构对应 F 将等同为下面九种类型同构对应之一，其几何特征如下所示:

F_0	$l = l'$		$O = O'$	$I = I'$
F_{I}	$l \neq l'$	$l \nparallel l'$	$O = O'$	$(= l \wedge l')$
F_{II}	$l \neq l'$	$l \parallel l'$	$OO' \parallel II'$	
F_{III}	$l = l'$		$O = O'$	$I \neq I'$
F_{IV}	$l = l'$		$O \neq O'$	$(OI) \equiv (O'I')$
$F_{I}F_{II}$	$l \neq l'$	$l \nparallel l'$	$O \neq O'$	O' 不在 l 上
$F_{I}F_{IV}$	$l \neq l'$	$l \nparallel l'$	$O \neq O'$	O' 在 l 上
$F_{III}F_{II}$	$l \neq l'$	$l \parallel l'$	$OO' \nparallel II'$	
$F_{III}F_{IV}$	$l = l'$		$O \neq O'$	$(OI) \not\equiv (O'I')$

从上可知，九种不同类型的同构所对应的几何特征各不相同，参见图 1.44. 同构对应 F 根据 l, l', O, O', I, I' 的几何特征即可得知必为以上九种类型同构对应之一，且这一对应由 l, l', O, O', I, I' 已完全确定. 因而从数系 $N(l, O, I)$ 到 $N(l', O', I')$，不论其经过的一串第 I, II 类同构对应为何，最后所得的同

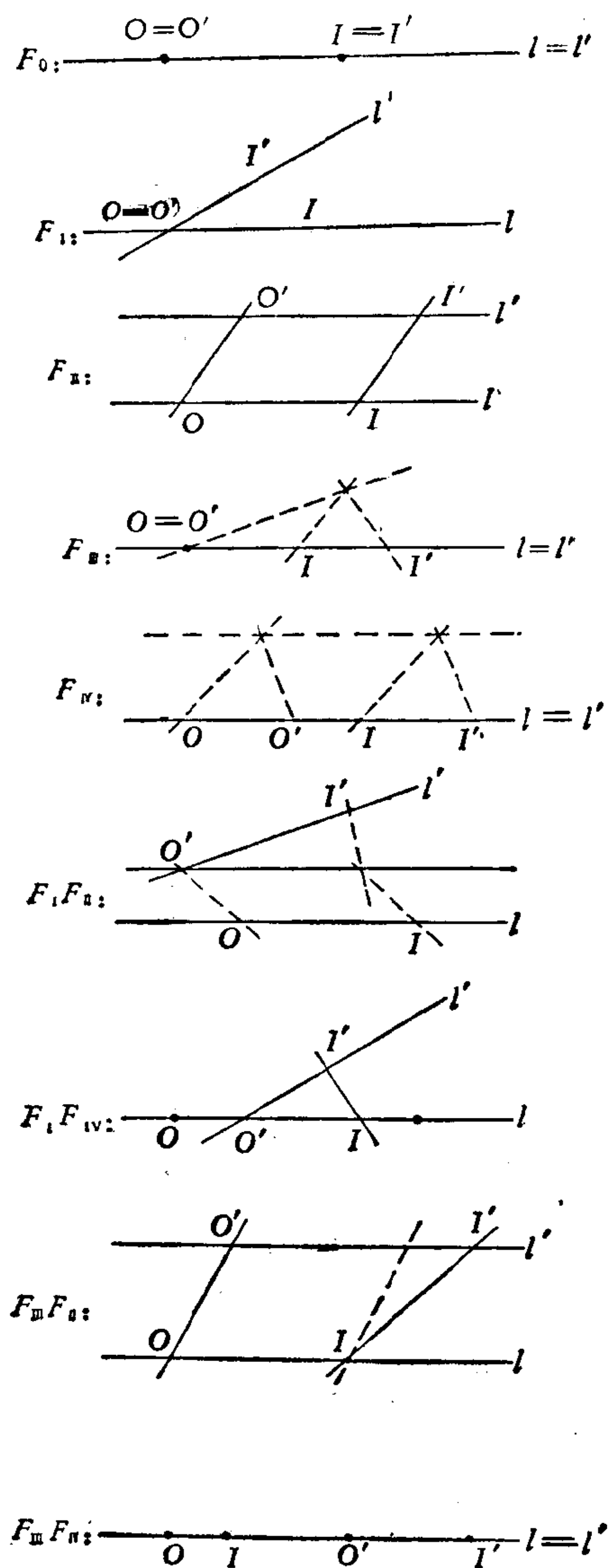

F_0:
$O=O'$
$I=I'$
$l=l'$
F_{I}:
l'
I'
$O=O'$
I
l
F_{II}:
O'
I'
l'
l
O
I
F_{III}:
$O=O'$
I
I'
$l=l'$
F_{IV}:
O
O'
I
I'
$l=l'$
$F_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{II}}$:
I'
l'
O'
O
I
l
$F_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{IV}}$:
l'
I'
O
O'
I
l
$F_{\mathrm{III}}F_{\mathrm{II}}$:
O'
I'
l'
O
I
l
$F_{\mathrm{III}}F_{\mathrm{IV}}$:
O
I
O'
I'
$l=l'$

图 1.44

构对应 F 已由这两数系所完全确定．这就证明了定理 2.

由本节定理 1，可知在任意直线上任取两不同点作为 0 与 1 后，即可确定一 Desargues 数系，且这些数系彼此同构．由本节定理 2，又知这些数系间的同构可以唯一地确定．因此我们可将这些数系在唯一确定的同构之下恒同为一个数系，记之为 $\mathbf{N}$，则在 $\mathbf{N}$ 与每一直线上的任一 Desargues 数系 $N(l, O, I)$ 间都有确定的同构

$$F: \mathbf{N} \approx N(l, O, I)$$

由于 $\mathbf{N}$ 是一特征为 0 的数体，故我们将称 $\mathbf{N}$ 为原来 Desargues 平面或 Desargues 几何的附属 **Desargues** 数体．一般说来，它非数域，即乘法交换律一般不成立．其成立与否与 Pappus 公理或 Hilbert 所称（交线）Pascal 公理有关，参见下章第 1 节．附属 Desargues 数体随所考虑的几何而异，但它已充分反应了原来几何的特性．事实上，原来的几何可从它的附属 Desargues 数体复原出来，参阅 Hilbert 原著或一般的几何基础著作．

附注 本节定理 2 的内容并不简单．事实上，在投影几何中，如果只假定所谓关联公理、无限公理，以及与 Desargues 公理相当的公理，而不再假定其它，则相应的定理 1 成立，而相应的定理 2 不成立．详言之，在上述那些公理的假定下，若在任一直线上取定三不同点作为 $0, 1, \infty$，即可确定一 Desargues 数体（∞ 除外），且这些数体彼此同构．但除非有另外的假定，如所谓 Pappus 公理，这些同构将是非确定的(non-Canonical)．只是在 Pappus 公理的假定下，才能证明所谓投影几何的基本定理，并在诸 Desargues 数体之间建立确定的同构对应，以及证明乘法交换律成立而成为一个数域．这些证明都不简单，是投影几何基础中最为深奥的部分，参见一般的投影几何著作或本书第六章 6.2 节．

1.7 Desargues 平面几何的坐标系

依 1.5 和 1.6 节，在 Desargues 平面中可唯一地确定一 Desargues 数系 $\mathbf{N}$，使在任一直线上选定两点 O 与 I 后，该直线上的点即与数系 $\mathbf{N}$ 中的数一一对应，其中 O 对应于 0，I 对应于 1．由此运用通常的解析几何方法即可以建立平面坐标系，使平面上的点与 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 中的数偶一一对应，详述如下．

如图1.45，在平面上任取两相交直线l_1与l_2，交点为O．在l_1与l_2上各任取不同于O的点I_1与I_2，于是以O，I_1，对应于0，1，可使l_1上的点与**N**中的数以确定的方式一一对应．又以O，I_2对应于0，1，可使l_2上的点与**N**中的数以确定的方式一一对应．如通常那样，O，l_1，l_2，I_1，I_2等构成一个坐标系统，O称为原点l_1，l_2各称为第一与第二轴，I_1，I_2称为单位点．

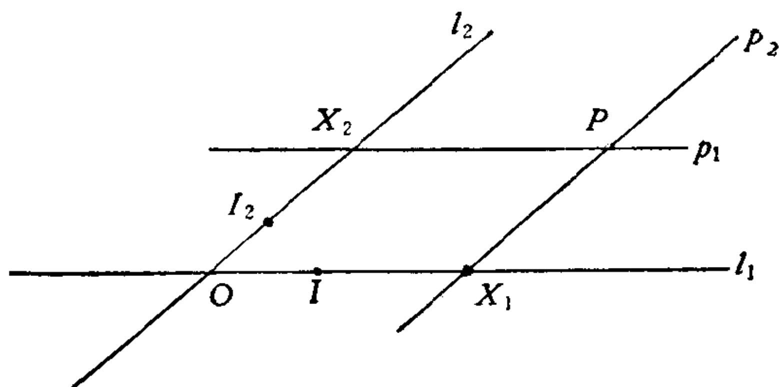


图 1.45

今设平面上一点P．当P不在l_1上时，过P作l_1的平行线p_1，否则命$p_1=l_1$．同样当P不在l_2上时，命p_2为过P而与l_2平行的直线，否则$p_2=l_2$．设p_2，p_1各与l_1，l_2交于X_1，X_2，所对应**N**中的数各为x_1，x_2，则

$$P\longleftrightarrow(x_1,\ x_2)$$

显然在平面上的点与$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$的数偶之间建立了一个一一对应关系，$x_1$与$x_2$各称为上述坐标系中$P$点的第一坐标与第二坐标，$(x_1,\ x_2)$称为$P$的坐标表示，记作，

$$P=(x_1,\ x_2)$$

取定一坐标系后，点与坐标间的一一对应关系使几何图形的性质与关系得以通过数量与数量关系来表达，即所谓**几何的代数化**．今以Desargues几何中几个最基本的几何关系作为实例说明如下．

［例1］ 设$R=(z_1,\ z_2)$是两点$P=(x_1,\ x_2)$与$Q=(y_1,\ y_2)$的中点，试用数量关系来表达这一几何关系．

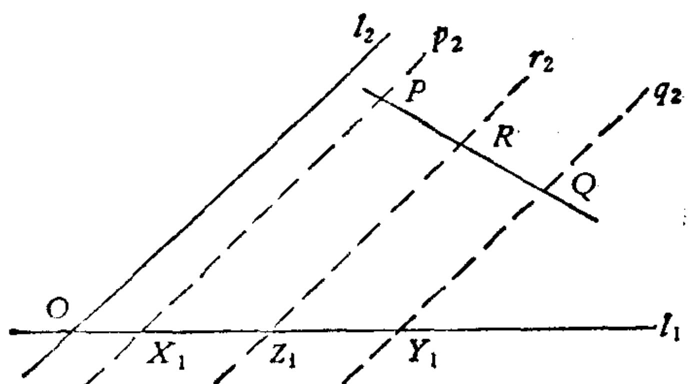


图 1.46

如图 1.46，试过 P, Q, R 各作直线 p_2, q_2, r_2, 使当 P, Q 或 R 不在 l_2 上时，这些线与 l_2 平行，否则即为 l_2. 命 p_2, q_2, r_2 各与 l_1 交于点 X_1, Y_1, Z_1, 各对应于 **N** 中的数 x_1, y_1, z_1. 易证不论何时，Z_1 恒为点偶 (X_1, Y_1) 的中点. 依 1.5 节的中点概念，应有 $2z_1 = x_1 + y_1$, 同样有 $2z_2 = x_2 + y_2$. 反之，若三个点 $P = (x_1, x_2)$, $Q = (y_1, y_2)$, $R = (z_1, z_2)$ 的坐标间有关系

$$2z_1 = x_1 + y_1 \qquad 2z_2 = x_2 + y_2$$

则点 R 必是点偶 (P, Q) 的中点，故上两式给出几何关系"R 是 (P, Q) 中点"的代数表达式.

对此实例之所以不厌其烦地叙述，其理由可见第三章 3.1 节.

[例 2] 设四点

$$P = (x_1, x_2) \qquad Q = (y_1, y_2) \qquad R = (z_1, z_2)$$
$$S = (u_1, u_2)$$

其中 $P \neq Q$, $R \neq S$, 求几何关系 PQ 与 RS 两直线平行或相重的相应数量关系.

为求出这一数量关系，先证二引理如下.

引理 1 设 $P = (x_1, x_2)$, $Q = (y_1, y_2)$, 而 $P \neq Q$. 在第一轴 l_1 上取点 A_1 对应于 **N** 中的数 $y_1 - x_1$, 又在第二轴 l_2 上取点 A_2 对应于 **N** 中的数 $x_2 - y_2$, 则 A_1A_2 与 PQ 平行或相重.

证 今只考虑 P, Q 都不在 l_1, l_2 上，且 PQ 不经过原点 O 也不平行于 l_1, l_2 的情形. 如附图 1.47，过 P 作 $PX_1 /\!/ l_2$, $PX_2 /\!/ l_1$, 各与

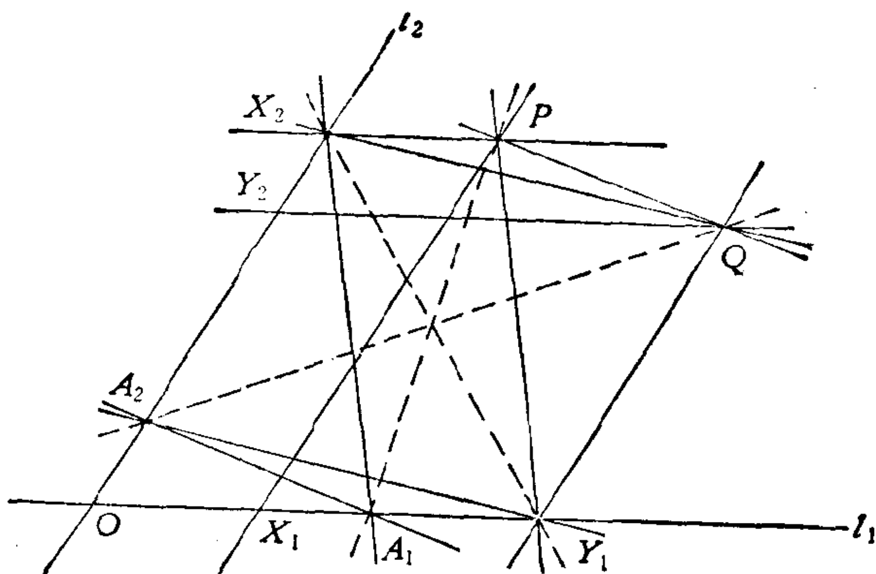


图 1.47

l_1, l_2交于X_1, X_2. 又过Q作 $QY_1/\!/l_2$, $QY_2/\!/l_1$, 各与 l_1, l_2 交于 Y_1, Y_2. 则 X_1, Y_1 各对应于**N**中的 x_1, y_1, 而 X_2, Y_2 各对应于**N**中的 x_2, y_2. 由于 $(y_1-x_1)+x_1=y_1$, 故由 l_1 上的加法定义,有 $PY_1/\!/X_2A_1$. 同样,由于在 l_2 上有 $(x_2-y_2)+y_2=x_2$, 故有 $QX_2/\!/Y_1A_2$. 因 $PX_2A_1Y_1$ 是平行四边形, 故由 1.2 节中的定理,两对角线 PA_1 与 X_2Y_1 互相平分. 同样, ▱$QX_2A_2Y_1$ 的对角线 QA_2 与 X_2Y_1 也互相平分. 因而 PA_1, QA_2, X_2Y_1 三直线共过一点,即点偶 (PA_1), (QA_2), (X_2Y_1) 的共同中点. 今应用 Desargues 公理 D_2 于 $\triangle PQX_2$ 与 $\triangle A_1A_2Y_1$, 即知 $A_1A_2/\!/PQ$, 如所欲证.

对于其它情形,以上证明失效,而须另行逐一验证,其理由仍见第三章 3.1 节. 这些证明虽容易但很烦琐,这里将一概略去.

引理 2 设坐标轴 l_1 上两点 A, B 各对应于**N**中的 a, b, l_2 上两点 C, D 各对应于**N**中的 c, d. 设 A, C 都不同于 O,因而 a^{-1}, c^{-1} 有定义. 则两直线 AC 与 BD 平行或相重的充要条件为

$$a^{-1}b=c^{-1}d$$

证 我们将设 AC 与 BD 平行或相重以证 $a^{-1}b=c^{-1}d$, 其逆定理容易由此得出.

下面将设 A, B 都不同于 I_1，C, D 都不同于 I_2，又 $AC /\!/ BD$（因而不相重合），且都不与 I_1I_2 平行.

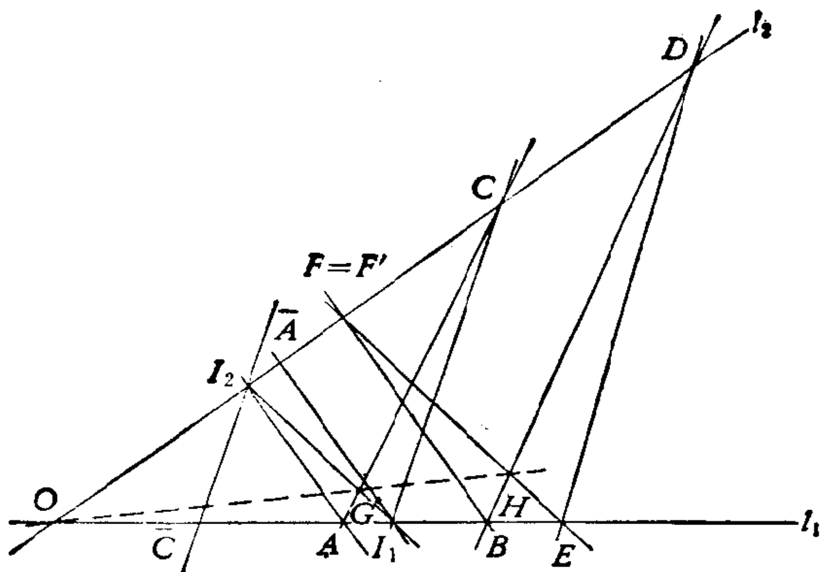


图 1.48

在以上这些条件限制下，如图 1.48，可过 I_1 作 $I_1\bar{A} /\!/ I_2A$，与 l_2 交于 $\bar{A}$；又过 I_2 作 $I_2\bar{C} /\!/ I_1C$，与 l_1 交于 $\bar{C}$，则由乘法定义，$\bar{A}, \bar{C}$ 各对应于**N**中的 a^{-1} 与 c^{-1}. 今过 B 作 $BF /\!/ I_1\bar{A}$ 交 l_2 于 F，又过 D 作 $DE /\!/ I_2\bar{C}$ 交 l_1 于 E，则仍由乘法定义，E，F 各对应于**N**中的 $c^{-1}d$ 与 $a^{-1}b$. 我们须证 $a^{-1}b = c^{-1}d$ 或 $EF /\!/ I_1I_2$.

为此过 E 作 $EF' /\!/ I_1I_2$，与 l_2 交于 F'，则 F' 与 E 都对应于 $c^{-1}d$. 由于 AC 不平行于 I_1I_2，故与 I_1I_2 交于一点，设为 G. 由于 BD, EF' 各与 AC, I_1I_2 平行，故也必交于一点，设为 H. 应用 Desargues 公理 D_1 于 $\triangle GI_1C$ 与 $\triangle HED$，可知 HG 经过 O 点，再应用 Desargues 公理 D_2 于 $\triangle GAI_2$ 与 $\triangle HBF'$，知 $BF' /\!/ AI_2$. 因为 $BF /\!/ AI_2$，故 BF 与 BF' 重合，所以 F 与 F' 重合，即

$$a^{-1}b = c^{-1}d.$$

如所欲证.

对于其它情形，也不难一一验证，这里一概从略.

附注 引理 2 中的条件在 B, D 也不同于 O 时，可改写为

$$b^{-1}a = d^{-1}c.$$

但由于在 Desargues 数系中乘法交换律一般不成立，因而不能改写为 $ba^{-1}=dc^{-1}$. 参阅第二章 2.1 节.

回到例 2，我们有下面的定理:

定理1 设四点 $P=(x_1, x_2)$, $Q=(y_1, y_2)$, $R=(z_1, z_2)$, $S=(u_1, u_2)$, 其中 $P\neq Q$, $R\neq S$, 且 PQ, RS 都不与 l_1 也不与 l_2 平行或重合，则 PQ 与 RS 平行或相重的充要条件为

$$(y_1-x_1)^{-1}(u_1-z_1)=(y_2-x_2)^{-1}(u_2-z_2)$$

证 在 l_1 上取点 A, B 各对应于N中的 y_1-x_1, u_1-z_1. 又在 l_2 上取点 C, D 各对应于N中的 x_2-y_2, z_2-u_2. 因 PQ 不与 l_2 平行或重合，故 $x_1\neq y_1$, 因而 A 不同于 O. 同样 B, C, D 也都与O不同. 由引理 1, AC 与 PQ 平行或相重, BD 与 RS 平行或相重，故 PQ 与 RS 平行或相重的充要条件为 AC 与 BD 平行或相重. 由引理 2，后者的充要条件为

$$(y_1-x_1)^{-1}(u_1-z_1)=(x_2-y_2)^{-1}(z_2-u_2)$$

亦即所要证明的那一式. 显然这一条件也可改为

$$(u_1-z_1)^{-1}(y_1-x_1)=(z_2-u_2)^{-1}(x_2-y_2)$$

[例 3] 把一图形中的点 (x_1, x_2) 所应满足 x_1, x_2 间的充要条件称为该图形的**方程**. 求一直线的方程以及一点在一直线上的充要条件.

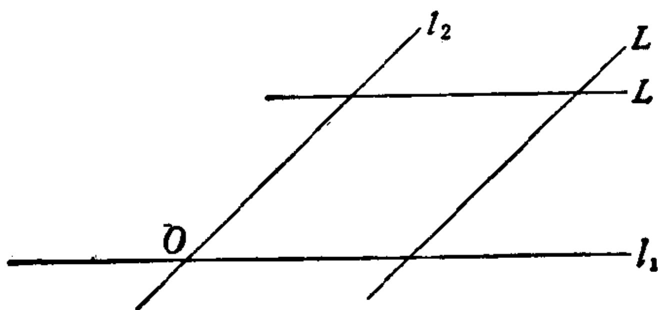


图 1.49

设直线为 L，点为 $P=(x_1, x_2)$. 若 L 与 l_2(或 l_1) 平行或重合，则 L 的方程显有形式

$$x_1=c \qquad (\text{或 } x_2=c)$$

其中 c 为常数，对应于 L 与 l_1(或 l_2)的交点. 如图 1.49.

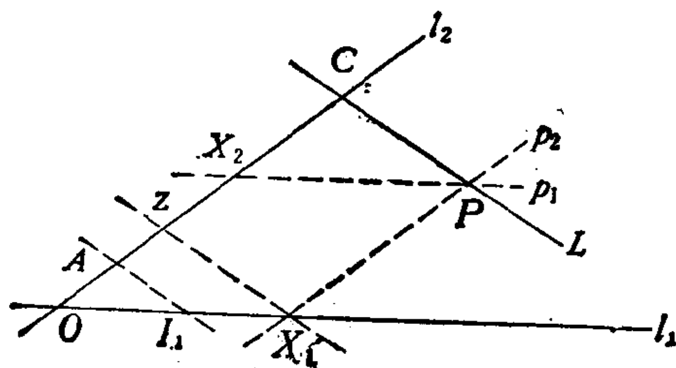


图 1.50

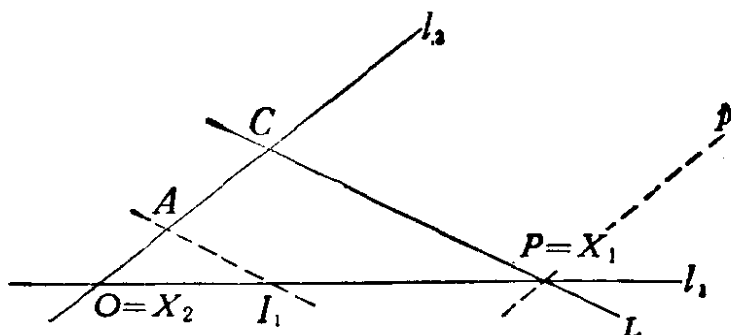


图 1.51

如图 1.50，设 L 不平行于 l_1, l_2，而与 l_2 相交于 C，而 C 对应于 $\mathbf{N}$ 中的数 c. 先设 L 不经过 I_1. 此时可过 I_1 作 I_1A 平行于 L，而与 l_2 交于 A，对应于 $\mathbf{N}$ 中的数 $a\neq 0$. 数 c 与 a 都由直线 L 所确定. 今设 $P=(x_1, x_2)$ 在 L 上，但不在 l_1 或 l_2 上. 过 P 作 $p_1/\!/l_1$, $p_2/\!/l_2$，各与 l_2, l_1 交于 X_2, X_1. 又过 X_1 作 $X_1Z/\!/L$，与 l_2 交于 Z. 则 X_1, X_2 各对应于 $\mathbf{N}$ 中的 x_1, x_2，而依乘法定义，Z 对应于 ax_1. 又依加法定义有

$$ax_1+x_2=c$$

如图 1.51，若 P 既在 L 上又在 l_1 上，则有 $x_2=0$. 而 C 对应于 $c=ax_1$，因而 x_1, x_2 仍满足上面的方程. 又若 P 既在 L 上又在 l_2 上，即 $P=C$，则 $x_1=0$, $x_2=c$，因而 x_1, x_2 也仍满足上面的方程.

如图 1.52，最后设 L 仍不平行于 l_1, l_2 而经过 I_1，命 C 为 L 与 l_2 的交点，对应于 $\mathbf{N}$ 中的 $c\neq 0$. 则如前证，L 上的任一点 $P=(x_1, x_2)$ 应满足方程

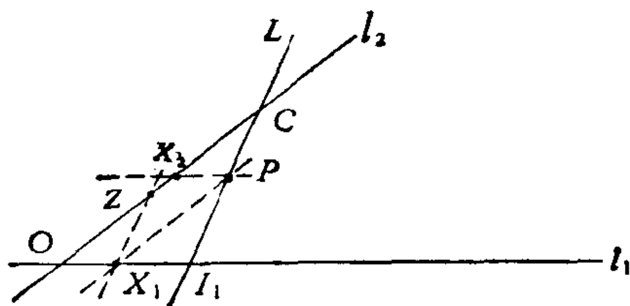


图 1.52

$$cx_1 + x_2 = c$$

反之，可知满足以下方程之一的所有点 $P=(x_1, x_2)$ 都在一确定的直线上：

$$x_1 = c$$

$$x_2 = c$$

$$ax_1 + x_2 = c \qquad (a \neq 0)$$

概括各种情形，可得

定理 2 平面上的直线方程为

$$a_1x_1 + a_2x_2 = c$$

其中 a_1, a_2 不同时为 0. 若 $a_2 \neq 0$，则直线与 l_2 相交，而交点对应于 **N** 中的数 $a_2^{-1}c$. 若 $a_1 \neq 0$，则直线与 l_1 相交，而交点对应于数 $a_1^{-1}c$.

附注 由于 Desargues 平面的附属 Desargues 数系的乘法一般说来是不可交换的，所以上面的直线方程不能写成

$$x_1a_1 + x_2a_2 = c$$

事实上这样的方程也并不代表一条直线.

［例 4］ 设三点 $P=(x_1, x_2)$，$Q=(y_1, y_2)$，$R=(z_1, z_2)$，求有一直线能同时通过这三点或三点共线的充要条件.

显然三点 P, Q, R 共线的充要条件是三点中至少有两点重合或三点互不相同而直线 PQ 与 PR 重合. 因而依据例 2 的引理，充要条件为以下诸关系式中至少有一成立：

1. $x_1 = y_1 = z_1$
2. $x_2 = y_2 = z_2$
3. $x_1 = y_1$ 且 $x_2 = y_2$

4. $x_1 = z_1$ 且 $x_2 = z_2$

5. $y_1 = z_1$ 且 $y_2 = z_2$

6. $x_1 \neq y_1$ $x_2 \neq y_2$ 且

$$(y_1 - x_1)^{-1}(z_1 - x_1) = (y_2 - x_2)^{-1}(z_2 - x_2)$$

7. $y_1 \neq z_1$ $y_2 \neq z_2$ 且

$$(z_1 - y_1)^{-1}(x_1 - y_1) = (z_2 - y_2)^{-1}(x_2 - y_2)$$

8. $x_1 \neq z_1$ $x_2 \neq z_2$ 且

$$(x_1 - z_1)^{-1}(y_1 - z_1) = (x_2 - z_2)^{-1}(y_2 - z_2)$$

第二章　垂直几何、度量几何与常用几何

2.1　Pascal 公理与乘法交换公理——(无序) Pascal 几何

在以 Hilbert 的关联公理 HI、(加强) 平行公理 HIV、无限公理与 Desargues 公理 D 为基础的 Desargues (平面)几何中，可确定唯一的 Desargues 数系 **N**，称为几何的附属 Desargues 数系，已见以前各节. 这一数系实际上是一数体 (特征为 0)，一般说来不满足复数系的乘法交换公理 N13. 为了使乘法交换公理也能满足而使 **N** 成为一个数域，必须在几何中引进其它一些公理. 一种方法是象 Hilbert《几何基础》一书所指出的那样，引进一条所谓 Pascal 公理. 这里 Hilbert 所称的 Pascal 公理实际上是现在通称为 Pappus 定理的一个特殊情形，更是通常投影几何中圆锥曲线退化为两条直线时的 Pascal 定理的特殊情形. 为了区别于一般的 Pappus 定理与 Pascal 定理，我们称 Hilbert 所考虑的那种公理为线性 Pascal 公理，其叙述如下.

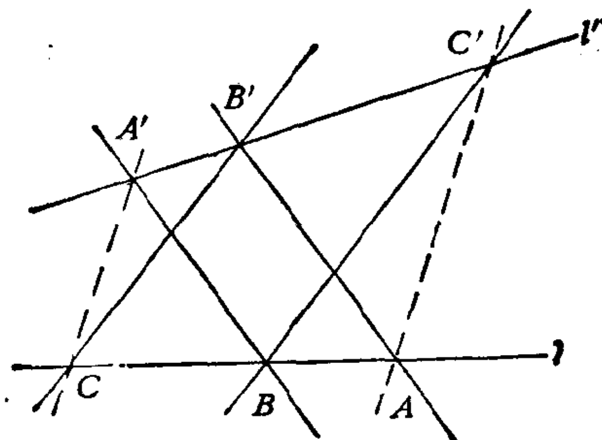


图 2.1

线性 Pascal 公理 见图 2.1，设两不同直线 l 与 l' 上各有互不相同的三点 A, B, C 与 A', B', C'，若

$$BC' /\!/ B'C \qquad AB' /\!/ A'B$$

则必有

$$AC' /\!/ A'C$$

在这一叙述中，称 l 与 l' 两直线为公理的基线．在两基线相交时，相应的公理称为**交线 Pascal 公理**．Hilbert 一书中的 Pascal 公理即指这一交线 Pascal 公理．在下面记作公理 P，有时还记作公理

$$\mathrm{P}\begin{bmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{bmatrix} \text{ 或 } \mathrm{P}\begin{bmatrix} l \\ l' \end{bmatrix}$$

或

$$\mathrm{P}\begin{bmatrix} l/ABC \\ l'/A'B'C' \end{bmatrix}$$

这一公理与 Desargues 几何的关系，将分以下几点来说明．

1. 基线为平行线时的线性 Pascal 公理．

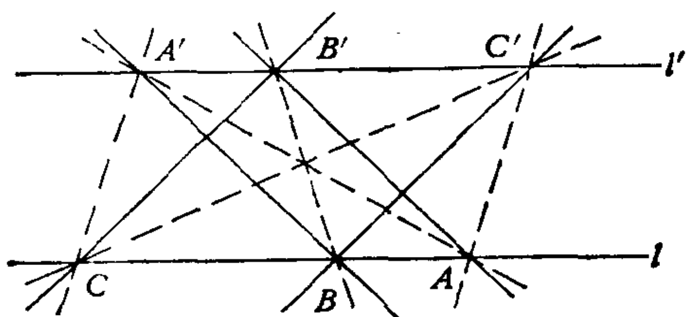


图 2.2

这时这一公理可从 Desargues 几何的其它公理推出，因而实质上是 Desargues 几何中的一条定理．证之如次．

由于 l 与 l' 平行，故从假设 $CBC'B'$ 是平行四边形，因此由第一章 1.2 节中的定理，对角线 BB', CC' 互相平分；同样，$ABA'B'$ 也是平行四边形，而 AA', BB' 也互相平分；于是 AA' 与 CC' 也互相平分．而仍由第二章 1.2 节定理，$ACA'C'$ 也是平行四边形，故有 $AC' /\!/ A'C$．如所欲证．见图 2.2．

2．交线 Pascal 公理P与乘法交换公理 N13.

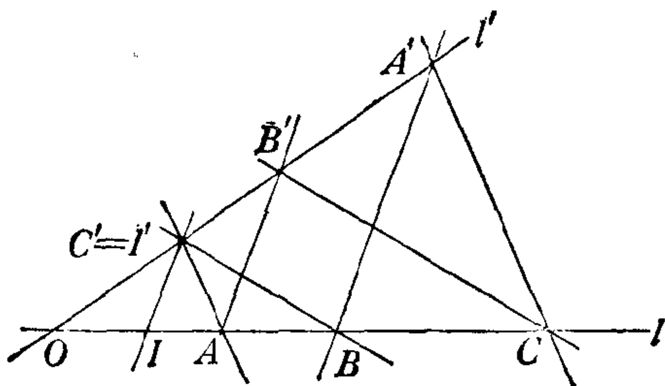


图 2.3

交线 Pascal 公理P在 Desargues 几何中的重要意义在于：它的成立与否是几何的附属 Desargues 数系是否满足乘法交换公理 **N**13 的充要条件.

为说明这一事实，先设公理P成立. 在 Desargues 平面上任取一直线 l 与其上两点 O 与 I 以定义 Desargues 数系，使 O 对应于 0，I 对应于 1. 在 l 上设两点 A，B 各对应于 **N** 中的 a,b. 在 $A=B$ 或 A,B 之一与 O 或 I 相同时，$ab=ba$ 是显然的. 为此如图 2.3 设 A，B，O，I 彼此都不相同. 此时可任取一过 O 而不同于 l 的直线 l'，并在上任取一不同于 O 的点 I'，作 $AB'/\!/II'$，$BA'/\!/II'$，各与 l' 交于 B'，A'. 又过 B' 作 $B'C/\!/I'B$，与 l 交于 C，若在 l' 上定义 Desargues 数系 **N**，使 O 对应于 0，I' 对应于 1，则由第一章 1.6 节 A' 对应于 **N** 中的 b，而 B' 对应于 **N** 中的 a，由乘法定义知 C 对应于 ba，今应用线性 Pascal 公理

$$\mathrm{P}\begin{bmatrix} l/ABC \\ l'/A'B'I' \end{bmatrix}$$

即知 $A'C/\!/I'A$. 因而由乘法定义知 C 也对应于 ab. 故 $ab=ba$，即乘法交换公理可由公理P得出. 反之，也容易证明若附属 Desargues 数系 **N** 的乘法交换公理成立，则交线 Pascal 公理P也成立，即几何公理P与数系公理 N13 是等价的.

由上面的证明还可知：若 Desargues 几何中 Pascal 公理对某

一对相交的基线 l, l' 成立，即

$$\mathrm{P}\begin{bmatrix} l \\ l' \end{bmatrix}$$

成立，则乘法交换公理成立，因而对任意另一对相交的基线来说，交线 Pascal 公理也成立。

3. 交线 Pascal 公理与比例理论.

Hilbert 在《几何基础》一书中，曾经应用全合公理 HIII 导出了 Pascal 公理作为定理，又以此为依据建立了比例理论. 但在比例理论的建立中，仍须用到全合公理. 在 Bernays 关于 Hilbert 该书的增订本所作的补充中，曾经简化了这一比例理论，但仍使用了全合公理. 下面将指出，在 Desargues 几何中，只需假定交线 Pascal 公理 P，即可圆满地建立比例理论，而不必再用到全合公理(以及次序公理). 但如果不假定这一公理 P，则要在 Desargues 几何中建立比例理论将是不可能的.

为说明这一事实，请先注意第一章 1.7 节中曾经证明过的定理：

设两不同直线 l, l' 交于一点 O. 在 l, l' 上各取不同于 O 的点 I, I', 并定义 Desargues 数系 $\mathbf{N}$, 使 O 对应 0, I, I' 对应于 1. 设 A, B 为 l 上不同于 O 的两点，各对应于 $\mathbf{N}$ 中的数 a, b, 又 C, D 为 l' 上不同于 O 的两点，各对应于 $\mathbf{N}$ 中的 c, d, 则 AC 与 BD 平行或重合的充要条件为

$$a^{-1}b = c^{-1}d$$

或

$$b^{-1}a = d^{-1}c$$

首先指出，在 Desargues 几何中，如果不假定交线 Pascal 公理 P 的成立，则一般说来上面的充要条件不能改写为

$$ba^{-1} = dc^{-1}$$

或

$$ab^{-1} = cd^{-1}$$

为证此，可如图 2.4 设 A, B 都不同于 O, I(对于相反的情

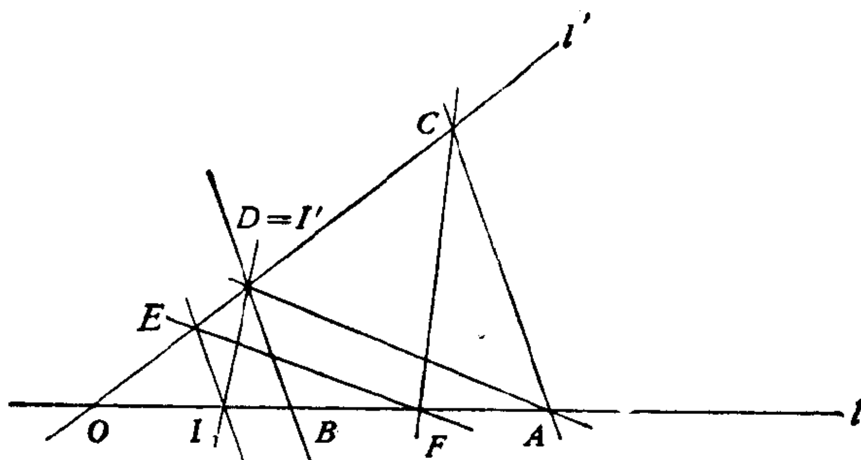


图 2.4

形自然可改写成上面的形式）．为简单起见，试考虑 $D=I'$ 即 $d=1$ 的情形．这时据前证定理从 $AC/\!/BD$ 有

$$a^{-1}b=c^{-1} \text{ 或 } b^{-1}a=c$$

我们须证：不假定公理 P 则从 $AC/\!/BD$ 不能得出

$$ba^{-1}=c^{-1} \text{ 或 } ab^{-1}=c$$

由于 a^{-1} 与 b^{-1} 在 $a\neq 0$，$b\neq 0$ 时可以是任意非 0 的数，故这一结论可直接由上述 2 得出．现试重证如次．

为此过 I 作 $IE/\!/BD$，与 l' 交于 E，则由第一章 1.5 节知 E 对应于 b 的逆元素 b^{-1}．又过 E 作 $EF/\!/AD$，与 l 交于 F，则 F 对应于 **N** 中的 ab^{-1}．如果 Pascal 公理 P 成立而应用之于

$$\mathrm{P}\begin{bmatrix} l/FAI \\ l'/DEC \end{bmatrix}$$

即得 $CF/\!/DI$，而有 $ab^{-1}=c$．反之，若 Pascal 公理 P 不成立，例如

$$\mathrm{P}\begin{bmatrix} l/FAI \\ l'/DEC \end{bmatrix}$$

不成立，则可取 $I'=D$，并作 $I'B/\!/IE$，与 l 交于 B，于是 CF 不平行于 ID．若设 A，B 对应于 a，b，C 对应于 c，则 F 仍对应于 ab^{-1}，而 CF 不平行于 ID 即意味着 $ab^{-1}\neq c$．由此知在一般情形下，从 $AC/\!/BD$ 可得 $a^{-1}b=c^{-1}d$，但不能得 $ba^{-1}=dc^{-1}$，因而要建立合理的比例理论是不可能的．

但若假定交线 Pascal 公理成立，则由 2，乘法交换公理成立，故 $AC /\!/ BD$ 的条件 $a^{-1}b = c^{-1}d$ 不仅可以改写为 $ba^{-1} = dc^{-1}$，且可改写为

$$ad = bc$$

又可以此定义为

$$a:b = c:d$$

由此建立比例理论是容易的.

4. 从交线 Pascal 公理 P 可推出 Desargues 公理 D_1, D_2 (在其它公理的假定下)，这是著名的 Hessenberg 定理，见 Hessenberg [1].

定理 (Hessenberg) 在满足关联公理 HI，(加强) 平行公理 HIV，无限公理 D_∞，与交线 Pascal 公理 P 的几何中，Desargues 公理 D_1, D_2 成立而成为几何中的定理.

证 显然只需证明 Desargues 公理 D_2 下面的情形已经足够，其余情形可由此推出. 将此情形重述如下:

设两三角形 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 的顶点都彼此不同，且对应顶点连线 AA', BB', CC' 都不相同而同过一点 O. 又设

$$AB /\!/ A'B' \qquad AC /\!/ A'C'$$

须证

$$BC /\!/ B'C'$$

我们将分四种不同情形来考虑:

(1) AB 不平行于 OC, AC 也不平行于 OB.

(2) AB 不平行于 OC, 但 AC 平行于 OB.

(3) AC 不平行于 OB, 但 AB 平行于 OC.

(4) AB 平行 OC, AC 平行 OB.

第一种情形: 如图 2.5.

此时可过 A 作直线平行于 BB'，该线必与 $A'C'$ 交于一点，设为 L，又与 CC' 交于一点，设为 M. 暂设 LB' 既不平行于 AA'，也不平行于 CC'. 命 LB' 与 AB 交点为 N. 由于 LB' 与 AA' 相交，故可应用交线 Pascal 公理

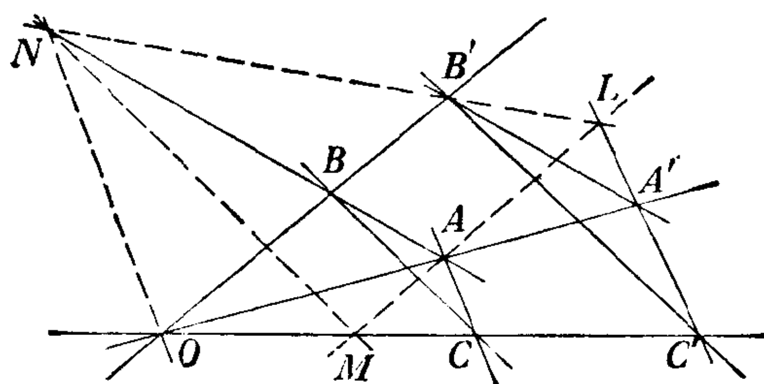


图 2.5

$$\mathrm{P}\begin{bmatrix} L & B' & N \\ O & A & A' \end{bmatrix}$$

得 $LA' /\!/ NO$，因而 $AC /\!/ NO$. 又因 AB 与 CC' 相交，故可应用交线 Pascal 公理

$$\mathrm{P}\begin{bmatrix} N & A & B \\ C & O & M \end{bmatrix}$$

得 $NM /\!/ BC$. 再应用交线 Pascal 公理

$$\mathrm{P}\begin{bmatrix} N & L & B' \\ C' & O & M \end{bmatrix}$$

得 $NM /\!/ B'C'$. 因此 $BC /\!/ B'C'$. 如所欲证.

前面暂设部分可依下法处理.

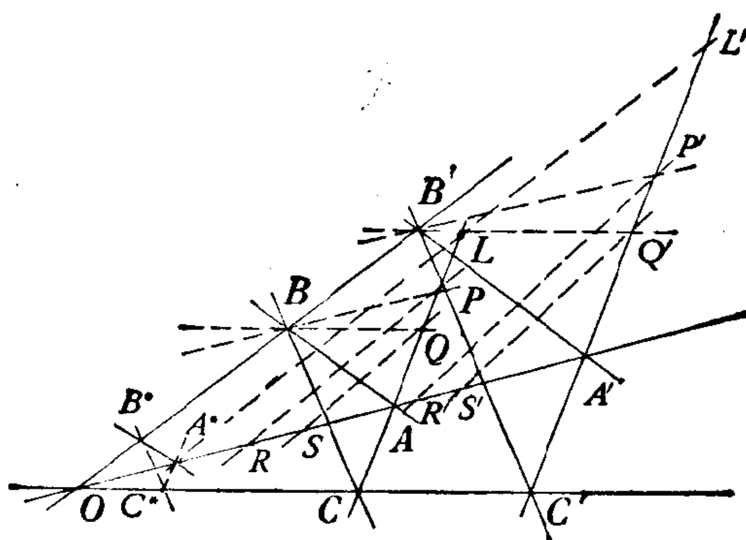


图 2.6

如图 2.6，过 B 作直线平行于 AA', CC'，各与 AC 交于 P,

Q. 同样，过 B' 作直线平行于 AA', CC', 各与 $A'C'$ 交于 P', Q'. 过 P, Q, P', Q' 作直线平行于 BB', 各与 AA' 交于 R, S, R', S'. 在 AA' 上取一点 A^*, 此点不同于 O 也不同于 R, S, R', S'. 过 A^* 作直线平行于 AB, 与 BB' 交于 B^*, 又作直线平行于 AC, 与 CC' 交于 C^*, 今过 A^* 作直线平行于 BB', 与 AC 交于 L, $A'C'$ 交于 L', 则 L 与 P, Q 不同，故 LB 既不平行于 AA' 也不平行于 CC', 因而 $\triangle A^*B^*C^*$ 与 $\triangle ABC$ 符合情形(1)的假设且符合暂设条件. 由前所证有 $B^*C^*/\!/BC$, 同样对 $\triangle A^*B^*C^*$ 与 $\triangle A'B'C'$ 有 $B^*C^*/\!/B'C'$, 故仍有 $BC/\!/B'C'$.

第二种情形：如图 2.7.

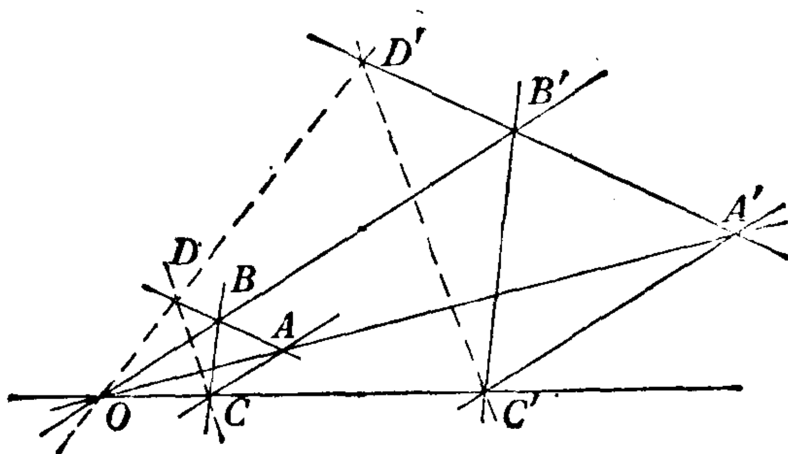


图 2.7

此时 $AC/\!/BB'$,但 AB 不平行于 CC'. 在 AB 上取一点 D, 使 CD 不平行于 BB'. 连 OD 与 $A'B'$ 交于 D', 则对 $\triangle ACD$ 与 $\triangle A'C'D'$ 可应用第一种情形得 $CD/\!/C'D'$. 其次 $\triangle DBC$ 与 $\triangle D'B'C'$ 也符合第一种情形,因而得 $BC/\!/B'C'$. 如所欲证.

第三种情形：这与第二种情形基本相同.

第四种情形：这时 $AB/\!/CC'$, $AC/\!/BB'$, 如果象第二种情形那样，过 O 作不同于 AA', BB', CC' 的又一直线，使与 AB, $A'B'$ 交于 D, D', 而 CD 又不平行于 BB',则 $\triangle ACD$, $\triangle A'C'D'$ 符合第三种情形,因而 $CD/\!/C'D'$. 其次 $\triangle DBC$ 与 $\triangle D'B'C'$ 又符合第二种情形或第三种情形,因而 $BC/\!/B'C'$.

至此 Hessenberg 定理已完全证明. 我们之所以不厌其烦地

将各种不同情形的证明都一一详细写出的原因，仍如前，请参阅第三章 3.1 节.

5. Pascal 几何.

定义 假设一种(平面)几何满足以下诸公理：

Hilbert 的关联公理 HI，

Hilbert 的(加强)平行公理 HIV，

无限公理 D_∞，

交线 Pascal 公理 P，

则这种几何称为 **Pascal** 几何.

在 Pascal 几何中，依据 4 中的 Hessenberg 定理，Desargues 公理 D_1, D_2 自然满足，因而依第一章 1.5 和 1.6 节，有一附属 Desargues 数系；又依 3，这一 Desargues 数系满足乘法交换公理 **N**13，因此它不仅是一个数体，而且是一个数域（由于无限公理特征为 0）. 我们称之为 Pascal 几何的**附属 Pascal 数域**. 在这种几何中，取定一座标系后，由于乘法可交换，故几何关系的代数表达式变得很简单. 例如第一章 1.7 节例 2 中的引理，对于 $P=(x_1, x_2)$，$Q=(y_1, y_2)$，$R=(z_1, z_2)$，$S=(u_1, u_2)$ 四点，只需 $P\neq Q$，$R\neq S$，则直线 PQ 与 RS 平行或重合的充要条件就变为

$$(u_1-z_1)(y_2-x_2)=(y_1-x_1)(u_2-z_2)$$

这里不再需要有 PQ, RS 不与 l_1, l_2 平行或重合的条件限制.

2.2 垂直公理与(无序)垂直几何

通常的欧几里得几何，本书中称为**常用几何**，以研究图形的度量性为主. 在公理体系，特别在 Hilbert 的公理系统中，这些度量性是通过不加定义的全合这一基本概念以及有关的全合公理来表达的. Hilbert 对这些属于第三类的全合公理，不是独立于其它几类公理来引入，而是假助于第二类的次序公理. 但是，由于导言中所述的那些缘故，我们将有意避免使用次序概念与次序公理来建立几何学. 这样，所谓线段、射线、角等都将失去意义，更不要说线

段的长短或角的大小了．为了不用次序公理而仍能建立一种类似于欧几里得几何的常用几何，甚至包罗更广的度量性几何学，除了保持 Hilbert 体系中的关联公理 HI，平行公理 HIV 以及在上章引进的无限公理与 Desargues 公理 D 外，我们将引进另外一些概念，以及有关公理以部分代替全合的概念和全合公理．本节以及下节即致力于这方面内容的论述．

首先，垂直关系是直观上最显著的也是人们最早熟悉的度量性质之一．只要从世界各民族在远古时期就或多或少认识到勾股形、长方形这一类图形来看，就能体会到其来源的久远．垂直概念甚至可能比平行概念更为基本．例如，两直线的平行关系即可通过它们都与另一直线垂直的关系来刻划．在我国古代几何学中，垂直关系通过长方形勾股形与各种丰富多彩的研究而贯穿于整个几何体系中．相反，类似于平行的概念几乎没有出现过．在 Hilbert 以后的现代几何学公理的研究中，许多作者致力于抛弃平行公理但保持垂直性质，因而把各种欧氏与非欧几何统一于同一几何的研究，请参阅 Bachmann [1, 2] 及其所引文献，也可参阅 Greenberg [1] 一书．这些著作都是从公理化的角度来考虑有关问题的．虽然如此，如果从机械化的角度来考虑，垂直性质也应占有特殊的地位．但因为关联概念与平行概念基本上是线性的，而垂直则可以说是最简单的一种非线性关系，因此，本节将首先以垂直为中心进行讨论．

今将垂直作为不加定义的基本概念来引入：直线 l 垂直于直线 l'，记作 $l\perp l'$．这一垂直概念满足以下诸公理．

垂直公理 O

O1 若 $l\perp l'$，则 $l'\perp l$.

O2 给定一点 O 与任一直线 l，过 O 必有且仅有一直线 $l'\perp l$.

O3 若两直线 l' 与 l'' 都与直线 l 垂直，即 $l'\perp l$，$l''\perp l$，则 l' 与 l'' 平行.

我们的几何将假定满足关联公理 HI,平行公理 HIV，无限公理与 Desargues 公理 D,以及上述三个垂直公理.

在这种几何中,一直线 l 也可以与它自身垂直,即 $l\perp l$. 这样的直线称为迷向线. 从公理 O_2、O_3 与平行公理可知,与迷向线平行的直线也一定是迷向线,即与它自身垂直. 而且任两平行的迷向线也互相垂直. 因此,如果每一条直线都是迷向线,则垂直概念将与平行或重合完全相同. 在这样的几何中,垂直概念将是多余的. 为此,我们将添入下述公理:

O4 经过任意一点都有非迷向线的直线.

为了使我们的几何具有较丰富的度量性质并尽量与通常的几何接近,将再添入下述公理:

O5（垂心公理） 设顶点 A, B, C 不在一直线上的$\triangle ABC$,过 A, B, C 各作直线 $l_A\perp BC$, $l_B\perp AC$, $l_C\perp AB$, 则 l_A, l_B, l_C 必经过同一点.

这一公理中三条过各顶点而垂直于三角形三边的直线称为这三角形的高. 三个高线共同的点称为三角形的垂心.

今设 A, B, C 不在一直线上,而 AB, AC 都是迷向线. 过 B, C 各作直线与 AC, AB 平行,则由平行公理知,这两直线必相交,设交点为 A'. 依垂直公理 O2 和 O3, CA' 也是迷向线且与 AB 既平行又垂直. 同样 BA' 也是迷向线且与 AC 既平行又垂直. 由垂心公理 O5, A' 是 $\triangle ABC$ 的垂心,而 $AA'\perp BC$. 如果 BC 也是迷向线,则同样将有 $AA'/\!/BC$. 由于 $ABA'C$ 是平行四边形,故这将与无限公理相违. 因此,顶点不在一直线上的三角形三边不能都是迷向线.

由此又可知公理 O4 事实上可从公理 O5 与其它公理推出.

我们将称满足以下诸公理的几何为**无序垂直几何**，或简称为**垂直几何**:

Hilbert 关联公理 HI,

Hilbert (加强)平行公理 HIV,

无限公理与 Desargues 公理 D,

垂直公理 O1—O5.

在这种垂直几何中，一个较不显著的事实是交线 Pascal 公理成立，因而是这种几何的一条定理. 一个直接的结果是，依据 Desargues 公理所引入的附属 Desargues 数系不仅是数体，而且是数域，其中乘法是可交换的. 这一事实为 Schur 所发现，参阅文献 Schur [1]. 为证此，我们将先证交线为两互相垂直的不同直线情形的 Pascal 公理.

垂直 Pascal 定理 设垂直于 O 的两不同直线 l 与 l' 上各有都不同于 O 且互不相同的点 A, B, C 与 A', B', C'，若

$$AB' /\!/ A'B \qquad BC' /\!/ B'C$$

则必有

$$AC' /\!/ A'C$$

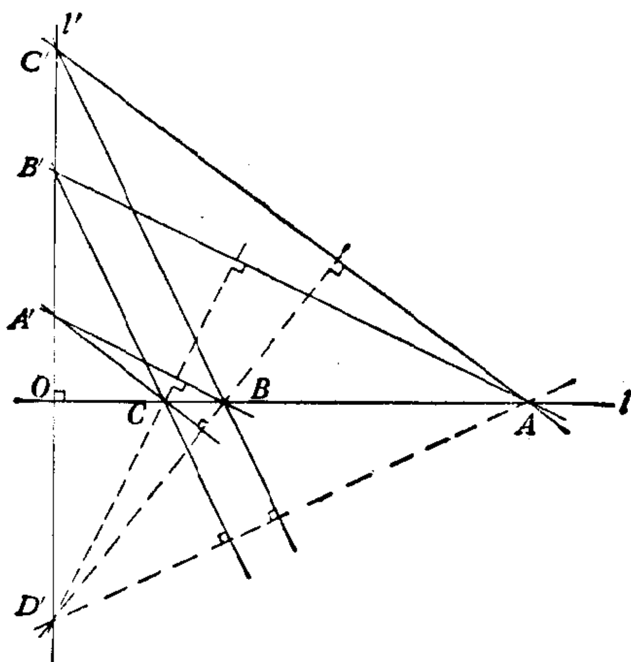


图 2.8

证 如图 2.8，首先，l 与 l' 都不能是迷向线. 今依公理 O2 过 B 作直线垂直于 $A'C$，则由公理 O3 与平行公理，此线必与 l' 交于一点，设为 D'.

今应用垂心公理于 $\triangle A'BD'$，即知 $D'C \perp A'B$.

由于 $AB' /\!/ A'B$，故由公理 O3 与平行公理，有 $D'C \perp AB'$.

应用垂心公理于 $\triangle AB'D'$，知 $B'C\perp AD'$.

由 $BC'/\!/B'C$ 得 $BC'\perp AD'$.

应用垂心公理于 $\triangle C'AD'$，得 $AC'\perp BD'$.

因 AC'，$A'C$ 都垂直于 BD'，故由公理 O3 得 $AC'/\!/A'C$. 证毕.

由于上面的 Schur 定理及其证明，交线 Pascal 定理对于垂直的两交线在垂直几何中成立，并由于在这一几何中已假定了 Desargues 定理作为公理，因而由 2.1 节，这一几何附属 Desargues 数系中的乘法是可交换的. 仍由 2.1 节中的 2，即知一般的交线 Pascal 定理也成立. 也可以不依赖于 2.1 节而直接用垂心公理来证明一般的交线 Pascal 定理. 下面的证明源于 Guse，参阅 Bachmann [1] 一书的第 208 页.

我们将记两直线 l，l' 的交点为 O，直线上的点各为 A_1，A_2，A_3 与 A'_1，A'_2，A'_3，假设为

$$A_2A'_3/\!/A_3A'_2 \qquad A_1A'_2/\!/A_2A'_1$$

需求证

$$A_1A'_3/\!/A_3A'_1$$

为证此，我们将设 A_1，A_2，A_3 互不相同且不同于 O，同样，A'_1，A'_2，A'_3 也互不相同又不同于 O. 又设 l，l' 不垂直，也非迷向线，且 $A_iA'_j$ 都不与 l 或 l' 垂直. 在诸直线互相垂直时，则下面的证明需稍作修改或另行考虑.

今对 123 的任一排列 ijk，置

$F_i = \triangle A_iA'_jA'_k$ 的垂心

$F'_i = \triangle A'_iA_jA_k$ 的垂心

$O_{ij} = \triangle OA_iA'_j$ 的垂心

由图 2.9，F_2F_3 以及 $O_{23}O_{32}$ 垂直于 $A_2A'_3$，$A_2A'_3/\!/A_3A'_2$，得 $F_2F_3/\!/O_{23}O_{32}$. 由 F_2O_{23} 与 F_3O_{32} 都垂直于 l'，得 $F_2O_{23}/\!/F_3O_{32}$，同样有 $F'_2F'_3/\!/O_{23}O_{32}$ 与 $F'_2O_{32}/\!/F'_3O_{23}$. 应用 Desargues 定理于 $\triangle F_2F'_3O_{23}$ 与 $\triangle F_3F'_2O_{32}$，即得 $F_2F'_3/\!/F_3F'_2$. 故 $F_2F_3F'_2F'_3$ 是平行四边形. 依第一章 1.2 节知，对角线 $F_2F'_2$，$F_3F'_3$ 互相平分.

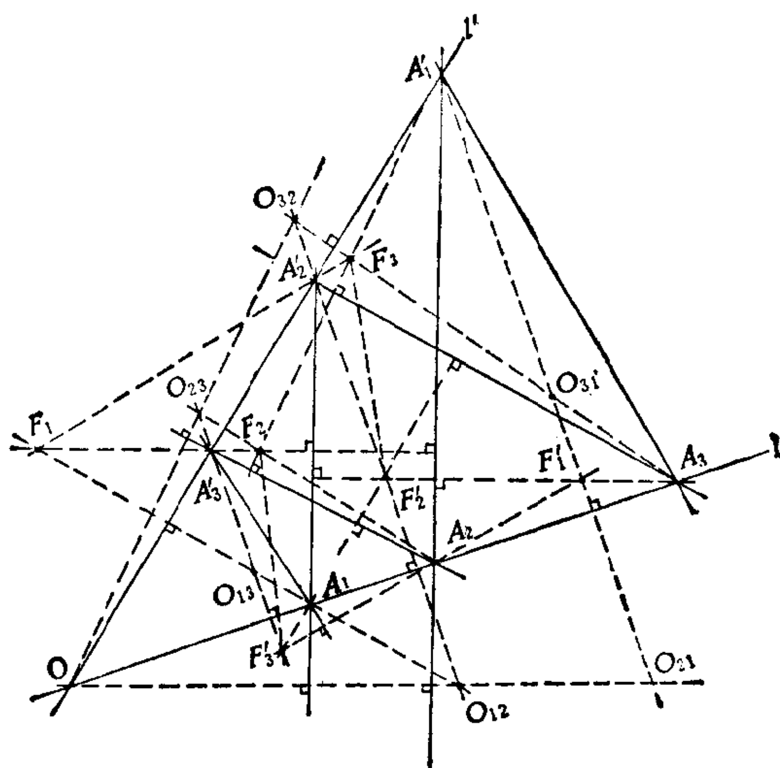


图 2.9

同样从 $A_1A_2'/\!/A_2A_1'$ 可推得 $F_1F_2F_1'F_2'$ 也是平行四边形，其对角线 F_1F_1'，F_2F_2' 互相平分。

由此知 F_1F_1'，F_3F_3' 互相平分，故由第 1 章 1.2 节知 $F_1F_3F_1'F_3'$ 是平行四边形．今应用 Desargues 定理于 $\triangle F_1F_3'O_{13}$ 与 $\triangle F_3F_1'O_{31}$，即得 $O_{13}O_{31}/\!/F_1F_3/\!/F_1'F_3'$.

暂设 F_1F_3 不经过 A_2' 使得 $A_2'F_1F_3$ 为三角形．因 $A_2'F_1$ 与 OO_{13} 都垂直于 A_1A_3'，故 $A_2'F_1/\!/OO_{13}$．又 $A_2'F_3$ 与 OO_{31} 都垂直于 A_3A_1'，故 $A_2'F_3/\!/OO_{31}$．今应用 Desargues 定理于 $\triangle A_2'F_1F_3$ 与 $\triangle OO_{13}O_{31}$，即得 $A_2'O/\!/F_1O_{13}/\!/F_3O_{31}$，但这与 $l'\perp F_1O_{13}$，且 l' 非迷向线相违，故 F_1F_3 必须经过 A_2'，因此 $F_1F_3\perp A_1A_3'$，$F_1F_3\perp A_3A_1'$，所以 $A_1A_3'/\!/A_3A_1'$．如所欲证．

虽然我们应用垂心公理证明了交线 Pascal 公理，又由 2.1 节知，从交线 Pascal 公理应用关联、平行、无限诸公理可以推出 Desargues 公理，但由于不论 Schur 还是 Guse 的证明在过程中都应用了有关中点的定理和 Desargues 定理，因之我们还不能冒然将

Desargues 公理从垂直几何的公理系统中除去. Desargues 公理是否可以从垂直几何的其它公理推出而作为定理的问题，由于我们的目的不在于公理的相互逻辑关系与独立性这类问题，故将不再进行讨论.

另一方面，由于垂直几何中既有垂直的概念又有平行与中点的概念，故对任一由不相同两点所组成的点偶（AB），可以定义（AB）的**垂直平分线**为经过点偶（AB）中点而与直线 AB 垂直的直线. 显然，若 AB 是一迷向线，则这一垂直平分线即是直线 AB 自身.

对于 $\triangle ABC$，点偶（AB），（AC），（BC）的垂直平分线将简称为三角形三边的垂直平分线. 正如常用几何一样，在垂直几何中，关于外心的定理仍然成立，即有下面的定理:

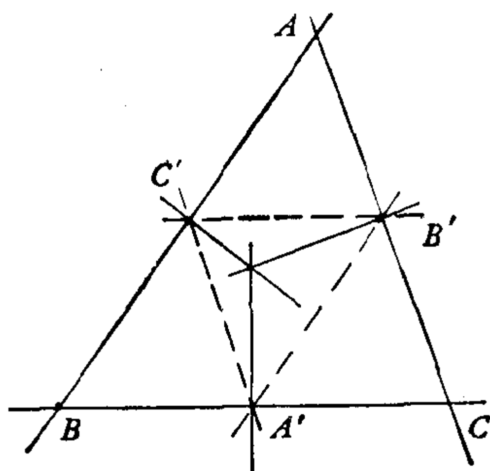


图 2.10

定理 1 三角形三边的垂直平分线必同交于一点.

证 如图 2.10，设点偶（BC），（AC），（AB）的中点各为 A'，B'，C'. 依第一章 1.2 节，$B'C' /\!/ BC$，$A'C' /\!/ AC$，$A'B' /\!/ AB$. 故由垂直公理，BC 的垂直平分线也垂直于 $B'C'$，即为 $\triangle A'B'C'$ 的 $B'C'$ 边上的高. 同样，AC，AB 的垂直平分线也即 $\triangle A'B'C'$ 的 $A'C'$ 与 $A'B'$ 边上的高. 由垂心公理，即知这三条垂直平分线必交于一点. 证毕.

将象常用几何那样，称三角形三个边上的垂直平分线的公共交点为这一三角形的**外心**. 因为在垂直几何中并无距离的概念，也无圆的概念，故这里的外心并不具有常用几何中三角形外接圆中心所具有的那些性质.

与外心的情形不同，常用几何中关于三角形内心与旁心的概念，不能直接推广于垂直几何. 因为在垂直几何中，并不假定任何

有关次序的公理，也无次序的概念，因而线段与角在这种几何中都无意义. 又因为垂直几何中并不假定任何有关全合的公理，也无全合的概念，故更不能有角的平分线或分角线这样的概念. 虽然如此，由于这种几何中既有垂直概念又有中点概念，因而可引入对称轴的概念以部份地代替常用几何中分角线的概念，述之如次，

设两点 A, B 所成点偶 (AB) 的垂直平分线为 l，则称 A 与 B 对 l 为对称的点，或称 l 为 (AB) 的对称轴. 又称 l 上任一点 A 与其自身为对 l 对称的点. 显然，这一定义只在 l 为非迷向线时才有意义.

可依常用几何中的作法作一点 A 对一直线 l（非迷向线）的对称点. 依垂直公理 O2，过 A 有一直线垂直于 l. 由于 l 非迷向线，故这一直线必与 l 相交于一点，设为 M. 依第一章 1.2 节作 A 对 M 的对称点 B，则 B 即 A 对 l 的对称点.

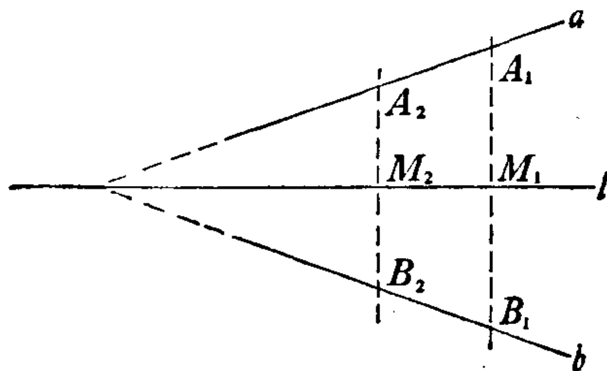


图 2.11

关于对称有以下几个简单性质.

性质 1 设非迷向线 l，若点 A_1, A_2, $\cdots$ 等都在同一直线 a 上，则 A_1, A_2, $\cdots$ 对 l 的对称点 B_1, B_2, $\cdots$ 等也在同一直线 b 上.

证 如图 2.11，过 A_1, A_2, $\cdots$ 作 l 的垂线. 由于 l 非迷向线，故这些垂线必与 l 相交，设交点为 M_1, M_2, $\cdots$，于是 A_1, A_2, $\cdots$ 对 l 的对称点 B_1, B_2, $\cdots$ 即 A_1, A_2, $\cdots$ 对 M_1, M_2, $\cdots$ 的对称点. 依第一章 1.2 节知 B_1, B_2, $\cdots$ 位于同一直线 b 上，且知若 $a /\!/ l$，则也有 $b /\!/ l$，若 a 与 l 相交于一点 O，则 b 也与 l 交于同一点 O.

由于这一性质，我们称直线 b 为直线 a 对 l 的对称线，或称 l 为直线 a 和 b 的对称轴.

性质 2 设非迷向线 l，若直线 a_1 与 a_2 平行，则 a_1 与 a_2 对 l 的对称线 b_1 与 b_2 也平行.

证 若 b_1 与 b_2 不平行而相交于 B，则 a_1 与 a_2 也将相交于 B 的对称点，与假设相违.

在性质 2 中若易平行为垂直，则证明就要复杂得多，见下面的叙述.

性质 3 设非迷向线 l，若直线 a_1, a_2 互相垂直，则 a_1, a_2 对 l 的对称线 b_1 与 b_2 也互相垂直.

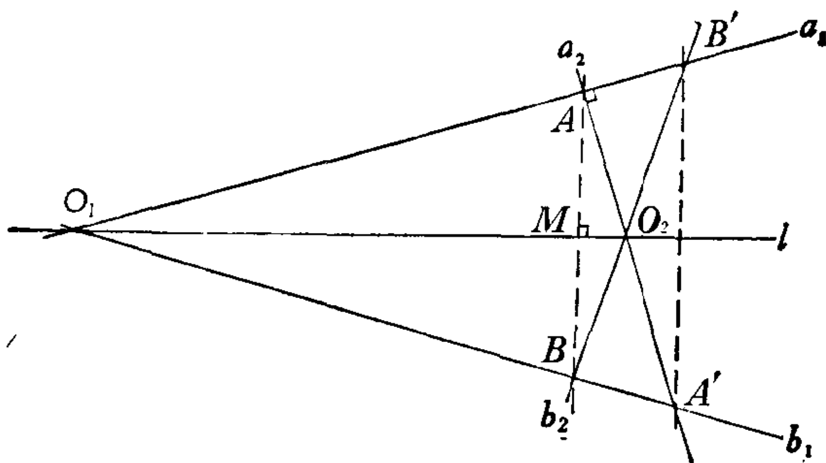


图 2.12

证 若 a_1, a_2 中有一与 l 平行，例如 a_1 与 l 平行，则 b_1 也与 l 平行，且 a_2, b_2 相同而与 l 垂直，因而 $b_1 \perp b_2$ 是显然的. 如图 2.12，今设 a_1, a_2 都不与 l 平行，而与 l 交于 O_1, O_2. 又因 a_1 或 a_2 是迷向线时 a_1 与 a_2 重合，此时 b_1, b_2 也将是迷向线且重合，而 $b_1 \perp b_2$ 甚显然，故以下也将设 a_1, a_2, b_1, b_2 等都非迷向线.

在这些假定下，a_1 与 a_2 不同且交于一点，设为 A. 先设 A 不同于 O_1 与 O_2. 命 A 对 l 的对称点为 B，则 B 即为 b_1 与 b_2 的交点. 又 $AB \perp l$, 且 AB 与 l 的交点 M 即点偶 (AB) 的中点.

今若 $AO_2 /\!/ O_1B$，则因 AO_2 与 O_1B 对 l 的对称线各为 BO_2 与 O_1A，故依性质 2 也有 $BO_2 /\!/ O_1A$，于是由 $a_1 \perp a_2$ 或 $O_1A \perp O_2A$ 即得 $O_1B \perp O_2B$ 或 $b_1 \perp b_2$.

今若 AO_2 不平行于 O_1B，则可设 AO_2 即 a_2 与 b_1 交于 A'，同样也应有 b_2 与 a_1 相交，设交点为 B'. 由于 a_2, b_1 对 l 的对称线各为 b_2, a_1，故 a_2, b_1 的交点 A' 对 l 的对称点即为 b_2, a_1 的交点

B'. 特别有 $A'B' \perp l$. 今应用垂心公理于 $\triangle O_1A'B'$, 可见 O_2 即三角形的垂心,而有 $B'O_2 \perp O_1A'$, 即 $b_1 \perp b_2$.

最后设 a_1, a_2 的交点 A 在 l 上与 O_1, O_2 重合, 则 l_1, l_2 的交点 B 也即 A 点. 如图 2.13, 今在 a_1 上任取一不同于 A 的点 A', 并过 A' 作直线 $a_2' /\!/ a_2$, 命 A' 与 a_2' 对 l 的对称点与对称线各为 B' 与 b_2',则由 $a_2' /\!/ a_2$, $a_2 \perp a_1$ 有 $a_2' \perp a_1$. 由前面已证的情形,应有 $b_2' \perp b_1$, 因而也有 $b_1 \perp b_2$. 至此完全证毕.

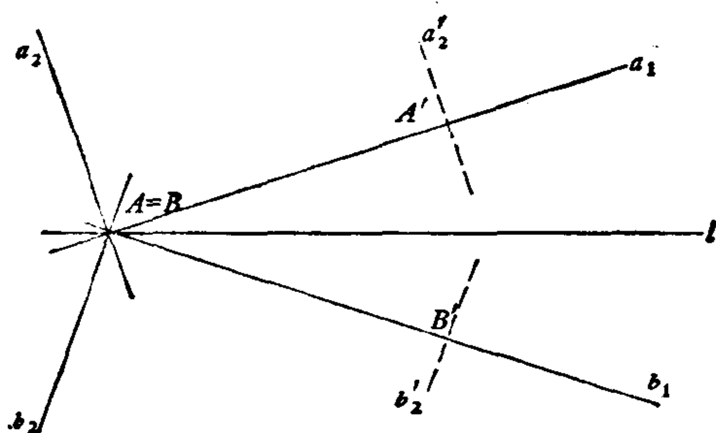


图 2.13

性质 4 对于任两非迷向线的平行直线 a 与 b,必有且恰有一直线 l,使 a 与 b 对 l 对称.

证 若有这样的 l,则 l 必与 a, b 平行,因而在 a 上任取一点 A 时,A 对 l 的对称点 B 必在 b 上,且 $AB \perp l$ 即垂直于 a, b. 故可在 a 上取 A,过 A 作直线垂直于 a,并交 b 于 B, 则 AB 的垂直平分线即是所求的唯一对称轴 l.

对于相交的两直线来说, 其对称轴就类似于常用几何中交角的分角线. 但与常用几何中的分角线不同. 在垂直几何中, 它不能保证任两相交的直线必有对称轴存在, 只是在相交直线有对称轴存在时, 这样的对称轴才有两条, 且互相垂直. 这时又与常用几何中两相交直线交角的分角线情况类似. 详言之, 有下面的性质.

性质 5 两相交直线或无对称轴,或恰有两条对称轴, 且这两条对称轴互相垂直.

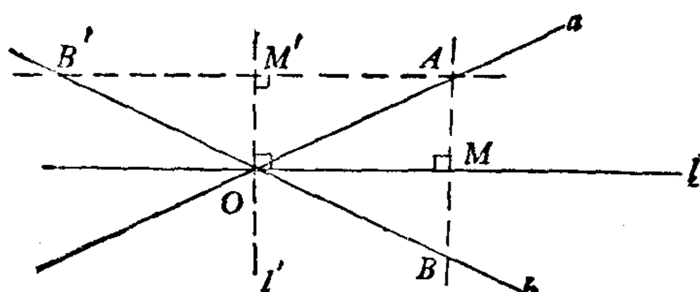


图 2.14

证 如图 2.14，设直线 a 与 b 相交于 O，且以 l 为对称轴. 今在 a 上任取一不同于 O 的点 A，又命 A 对 l 的对称点为 B，则 B 在 b 上，$AB\perp l$，且 AB 与 l 的交点 M 即点偶 (AB) 的中点.

今过 O 作 l 的垂线 l'，又过 A 作 l' 的垂线与 l' 交于 M'，与 b 交于 B'. 因 AB'，l 都垂直于 l'，故由垂直公理 O_3，$AB'/\!/OM$. 又因 M 是 (AB) 中点，故由第一章 1.2 节，O 也是点偶 (BB') 的中点，其次 AB，l' 都垂直于 l，故 $AB/\!/l'$. 因 O 是 (BB') 的中点，故又有 M' 是点偶 (AB') 的中点. 由此知 l' 是点偶 (AB') 的垂直平分线，A，B' 对 l' 对称，a，b 也对 l' 对称，因而 a，b 有两互相垂直的直线 l，l' 作为对称轴.

反之，假设 a，b 除 l 外另有一对称轴 l''. 今作 A，B 如前，又作 A 对 l'' 的对称点 B''，则 l，l'' 是 $\triangle ABB''$ 两边 AB，AB'' 上的垂直平分线，故其交点 O 即 $\triangle ABB''$ 的外心. 由关于外心的定理，知 (BB') 的垂直平分线也过 O 点，特别知 O 是 (BB') 的中点，与前面类似，可知 $l''\perp l$，而 l''，l' 重合，因而 a，b 的对称轴恰有两条，即 l，l'. 证毕.

与常用几何中三角形内心与旁心的定理类似，在垂直几何中有下面的定理.

定理 2 若 $\triangle ABC$ 的 AB，BC 两直线有对称轴 b 与 b'，又 AC，BC 两直线也有对称轴 c 与 c'，则 AB，AC 两直线也有对称轴 a，a'，且这些对称轴三三交于四个不同的点.

证 首先易知 $\triangle ABC$ 的三边都不是迷向线.

如图 2.15，任取 BA，BC 的对称线 b 与 CA，CB 的对称线

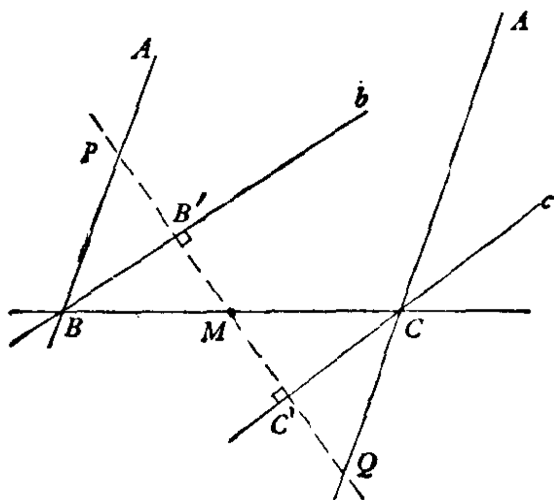


图 2.15

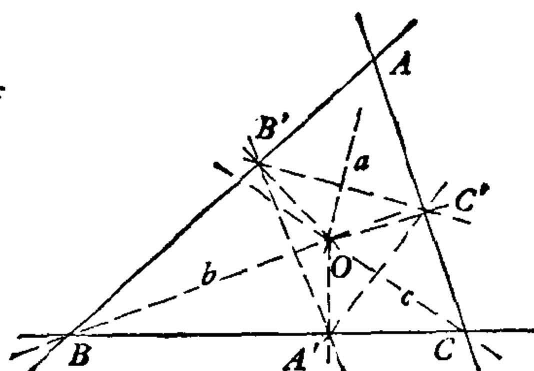


图 2.16

c，试先证 b，c 不能平行．否则取 (BC) 的中点 M，并过 M 作直线垂直于 b 与 c，设与 b，c 交于 B'，C'，而与 BA，CA 交于 P，Q．因 BC 不能垂直于 b，c，否则 BC 将与 BA，CA 重合，故 B'，C' 不同于 B，C．由第一章可知，M 是 $(B'C')$ 中点．由 B'，C' 是 (MP) 与 (MQ) 中点易知，M 是 (PQ) 中点，于是 $BA /\!/ CA$ 显然不合理．

由上知 b，c 必相交于一点，设为 O．如图 2.16，过 O 作 $OA' \perp BC$，$OB' \perp AB$，$OC' \perp AC$，并设这些垂线与 BC，AB，AC 的交点即为 A'，B'，C'．因 BA' 对 b 的对称线是 BB'，故由性质 3，知 OA' 对 b 的对称线是 OB'，A' 对 b 的对称点即为 B'，因而 b 为点偶 $(A'B')$ 的垂直平分线．同样，A' 与 C' 对 c 对称，而 c 为点偶 $(A'C')$ 的垂直平分线．由关于三角形外心的定理即知 O 为 $\triangle A'B'C'$ 的外心，点偶 $(B'C')$ 的垂直平分线设为 a 也经过 O．于是 B'，C' 对称于 a，直线 OB'，OC' 也对称于 a．仍由性质 3，即知直线 AB'，AC' 也对称于 a．因而 a 必经过 A 点，且 a 是 AB，AC 的一个对称轴．

由此知 AB，AC 除 a 外另有一对称轴，设为 a'，且同前可知 a，b'，c' 交于一点，同样，b，c'，a' 与 c，a'，b' 各交于一点．至此定理证毕．

2.3 （无序）垂直几何的垂直坐标

在 Pascal 几何或 Desargues 几何中，坐标轴的选取除了须相交以外都是任意的．在（无序）垂直几何中，由于有相互垂直这种特殊关系的直线，我们可选取任意两条相交且垂直因而都不是迷向线的直线作为坐标轴 l_1 与 l_2，交点 O 是原点，单位点 I_1 与 I_2 则各在 l_1 与 l_2 上任意选取，只需与 O 不同即可．过平面上一点 P 作 l_1 与 l_2 的垂线，并与之各相交于 X_1 与 X_2．在 l_1 与 l_2 上命以 O 对应于 0，I_1，I_2 对应于 1 所定数系统中 X_1，X_2 各对应于 x_1，x_2，则 P 的坐标即数对 (x_1, x_2)：$P=(x_1, x_2)$．这样由两条相交垂直的直线所定的坐标系统称为**垂直坐标系统**，P 点的坐标 x_1，x_2 也称为**垂直坐标**．由于垂直几何是一种特殊的 Pascal 几何，垂直坐标系统又是一种特殊的坐标系统，因而以前在 Pascal 几何中对应于几何关系的那些代数关系式，例如平行、中点、直线方程现仍然成立．然而在垂直几何中，垂直、对称等概念则是 Pascal 几何中所没有的．本节的目的即在于建立这些几何关系在垂直坐标系统中的对应代数关系．

在下面的叙述中，垂直几何的附属数系将记为 $\mathbf{K}$．从任一直线 l 以及其上不同两点 O 与 I 作为 0 与 1 所定的数系，依以前记法为 $N(l, O, I)$．由于垂直几何中 Pascal 定理的缘故，这些数系都是数域，即乘法交换律成立，且 $N(l, O, I)$ 与 $\mathbf{K}$ 间有一唯一确定的同构关系，因而在下面将依这一确定的同构关系把 $N(l, O, I)$ 与 $\mathbf{K}$ 恒同为一．

一个由两垂直相交直线 l_1，l_2 以及其上两点 I_1，I_2（不同于 l_1，l_2 的交点 O）所定的垂直坐标系记为 $C\{l_1, l_2, I_1, I_2\}$，或简记为 C．首先，我们引进一组平行直线对垂直坐标系 C 的斜率的概念．

由第一章 1.7 节知，平行于 l_2 轴的直线方程恒有下面的形式：

$$x_1 = c$$

图 2.17

这里 c 是$\mathbf{K}$中的常数．与 l_2 轴不平行的任一直线的方程则有下面的形式：

$$x_2 = mx_1 + a$$

其中 a,m 也是 $\mathbf{K}$ 中的常数．与 l_2 轴不相平行而彼此平行的直线，其方程中可以有不同的 a，但将有相同的 m． 我们称m为这些平行直线的**斜率**．特别对于平行于 l_1 轴的直线，斜率为 $m=0$．至于平行于 l_2 轴的那些直线，我们将引进一个新符号∞，并定义这些与 l_2 轴平行的直线的斜率为∞．

若一组平行直线的斜率为 m，则与这些直线垂直的那些直线也互相平行，它们的斜率是m的一个函数，记这一函数为 f，则有

$$f(0)=\infty \qquad f(\infty)=0$$

图 2.18

以下将定出 m 不等于 0 也不等于 ∞ 时 $f(m)$ 的值.

如图 2.18，为求函数 f，试取 I_2 对 O 的对称点 J_2，J_2 的坐标为 $(0,-1)$. 依垂心公理，作 $\triangle I_1I_2J_2$ 的垂心 E. 于是 E 在 l_1 轴上，设其坐标为 $(k, 0)$. 这里 k 为由垂直坐标系 $C(l_1, l_2, I_1, I_2)$ 所确定的 **K** 中的一个常数，我们将称 k 为这一坐标系的**垂率**，其意义如下所述.

由于 $I_1=(1,0)$，$I_2=(0, 1)$，$J_2=(0, -1)$，$E=(k, 0)$，故直线 I_1J_2 的方程为 $x_2=x_1-1$，其斜率为 1. 同样，I_1I_2，I_2E，J_2E 的斜率各为 -1，$-k^{-1}$，k^{-1}. 由于 $I_1I_2\perp J_2E$，$I_1J_2\perp I_2E$，故有

$$f(1)=-k^{-1} \qquad f(-1)=k^{-1}$$
$$f(k^{-1})=-1 \qquad f(-k^{-1})=1$$

从这些公式可以看出，若

$$m=+1,\ -1,\ k^{-1}\text{ 或 }-k^{-1}$$

又

$$f(m)=m'$$

时，都有关系式

$$kmm'+1=0$$

我们将证明这一关系式实际上普遍成立，即有下面的定理.

定理 1 若垂直坐标系统的垂率为 k，则任两不与任一坐标轴平行而互相垂直的直线，其斜率 m 与 m' 之间有关系式

$$kmm'+1=0$$

或即

$$f(m)=-1/km$$

证 过 I_1 作斜率为 $m(m\neq 0, \infty)$ 的直线，与 l_2 交于 A_2. 过 A_2 作直线平行于 I_1I_2 而与 l_1 轴交于 A_1. 则 I_1A_2 的方程为 $x_2=mx_1-m$，A_2 的坐标为 $(0, -m)$. 换言之，A_1 与 A_2 在数系 $N(l_1, O, I_1)$ 与 $N(l_2, O, I_2)$ 中对应的数都是 $-m$. 今作 $\triangle A_2I_1J_2$ 的垂心 F. 显然 F 在 l_1 轴上. 由于 A_2F，I_2E 都垂直于 I_1J_2，故 $A_2F/\!/I_2E$. 由于 E，A_1 各对应于 l_1 上数系中的 k 与 $-m$，故 F 对

应于数系中的 $-km$，即 $F=(-km,0)$. 于是，J_2F 的斜率为 $-\frac{1}{km}$. 因 $J_2F\perp I_1A_2$，故 $m'=-\frac{1}{km}$. 如所欲证.

假设两垂直直线系用下面的方程表示:

$$L_u: \ u_1x_1+u_2x_2+u_3=0$$
$$L_v: \ v_1x_1+v_2x_2+v_3=0$$

其中 u_1, u_2 不同时为 0，v_1, v_2 也不同时为 0. 在 u_1, u_2, v_1, v_2 都不为 0 时，L_u，L_v 的斜率各为 $m_u=-u_1/u_2$，$m_v=-v_1/v_2$. 因此 L_u，L_v 相互垂直的条件变为

$$ku_1v_1+u_2v_2=0$$

若 u_1, u_2, v_1, v_2 中有一为 0，例如设 $u_2=0$ 时，将有 $m_u=\infty$，此时应有 $m_v=0$，或 $v_1=0$，因此上述条件仍然成立. 其它情形也与此相似. 故上述条件不论何时都普遍成立，定理 1 因之可改写为下面的形式.

定理 1′ 两直线 L_u 与 L_v 互相垂直的充要条件为

$$ku_1v_1+u_2v_2=0$$

其中 k 为相应坐标系的垂率.

特别对于一条直线的情形，例如 L_u 是迷向线的充要条件为 L_u 与它自身垂直，所以即为

$$ku_1^2+u_2^2=0$$

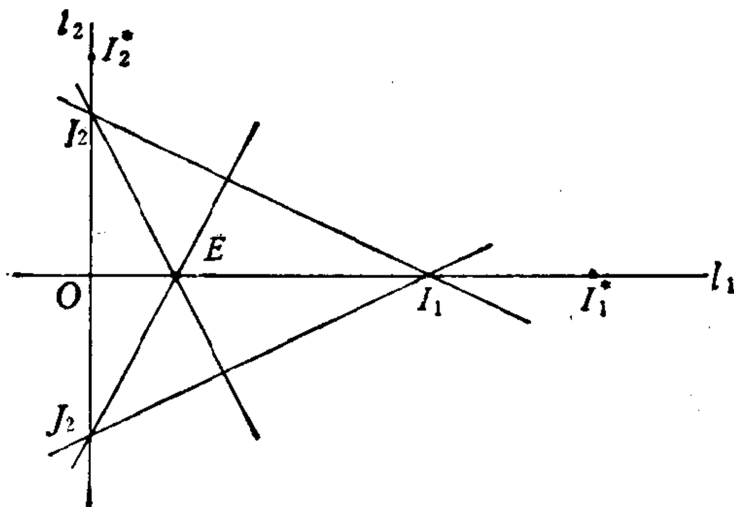


图 2.19

垂率 k 显然依赖于垂直坐标系的选择．我们将探讨不同的垂直坐标系 $C=C(l_1, l_2, I_1, I_2)$ 与 $C^*=C(l_1^*, l_2^*, I_1^*, I_2^*)$ 所定垂率 k 与 k^* 之间的关系．首先考虑 $l_1^*=l_1, l_2^*=l_2$，但 I_1^*, I_2^* 不必与 I_1, I_2 相同．为此简记 l_1, l_2 上的数系统为 $N_1=N(l_1, O, I_1)$，$N_1^*=N(l_1, O, I_1^*)$，$N_2=N(l_2, O, I_2)$，$N_2^*=N(l_2, O, I_2^*)$．见图 2.19，如前，作 I_2 对 O 的对称点 J_2，并作 $\triangle I_1I_2J_2$ 的垂心 E，则 E 在 C 中的坐标为 $(k, 0)$，即 E 对应于 N_1 中的数 k．今设 I_1^*，I_2^* 在 C 中的坐标为 $(a_1, 0)$ 与 $(0, a_2)$，即各对应于 N_1，N_2 中的数 a_1，a_2．则 I_1，I_2，J_2 在 C^* 中的坐标各为 $(a_1^{-1}, 0)^*$，$(0, a_2^{-1})^*$，$(0, -a_2^{-1})^*$，或各对应于 N_1^*，N_2^* 中的数 a_1^{-1}，a_2^{-1}，$-a_2^{-1}$．又 E 在 N_1^* 中应对应于数 ka_1^{-1}，故在 C^* 中的坐标为 $(ka_1^{-1}, 0)^*$．于是直线 I_1J_2 在 C^* 中的斜率为

$$m^*=a_2^{-1}/a_1^{-1}=a_1/a_2$$

又 I_2E 的斜率为

$$m^{*\prime}=-a_2^{-1}/(ka_1^{-1})=-a_1/(ka_2)$$

由于 $I_2E\perp I_1J_2$，故依前面的定理，命 k^* 为 C^* 的相应垂率时，应有

$$k^*m^*m^{*\prime}+1=0$$

由此即得

$$k^*=k\cdot\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2$$

故两垂率 k 与 k^* 间相差一个非 0 因子 a_2/a_1 的平方，a_2/a_1 是 $\mathbf{K}$ 中非 0 的数．

这一事实实际上普遍成立．换言之，我们有下面的定理．

定理 2　任两垂直坐标系的垂率都相差一 $\mathbf{K}$ 中的非 0 平方因子．

由此定理，一个垂直几何确定了一组彼此相差非 0 因子平方的数 $\{ka^2/a\neq 0, a\in\mathbf{K}\}$．我们称这一数组为该几何的**垂方组**．今证此定理如次．

证　在 $l_1^*=l_1$，$l_2^*=l_2$ 时，前面已证明了此定理．今考虑 O^*

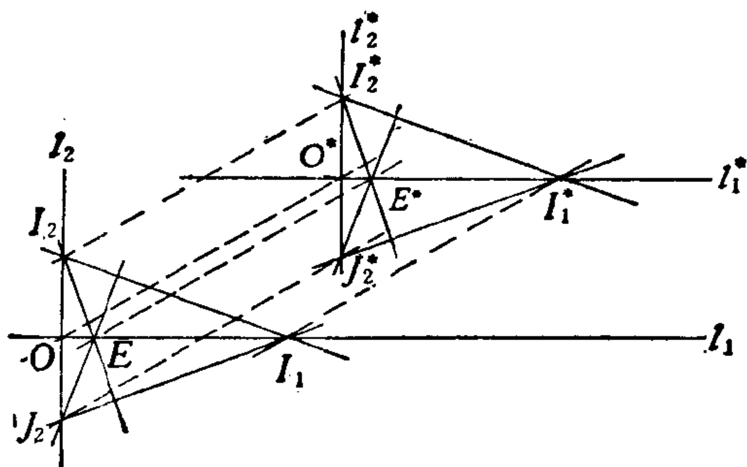


图 2.20

不在 l_1 或 l_2 上，而 $l_1^*/\!/l_1$，$l_2^*/\!/l_2$ 的情形．如图 2.20，连 OO^* 并过 I_1，I_2 各作 OO^* 的平行线与 l_1^*，l_2^* 交于 I_1^* 与 I_2^*．试先考虑 C^* 中的单位点即为 I_1^* 与 I_2^* 这一情形．作 I_2 对 O 的对称点 J_2 与 I_2^* 对 O^* 的对称点 J_2^*．又作 $\triangle I_1I_2J_2$ 与 $\triangle I_1^*I_2^*J_2^*$ 的垂心 E 与 E^*．则 E 在数系 $N=N(l_1, O, I_1)$ 中对应的数 k 即是由坐标系 $C(l_1, l_2, I_1, I_2)$ 所定的垂率．同样，E^* 在 $N^*=N(l_1^*, O^*, I_1^*)$ 中对应于 $C^*(l_1^*, l_2^*, I_1^*, I_2^*)$ 所定的垂率 k^*．今应用 Desargues 公理于 $\triangle I_1OI_2$，$\triangle I_1^*O^*I_2^*$，得 $I_1I_2/\!/I_1^*I_2^*$．同样有 $I_1J_2/\!/I_1^*J_2^*$．故有 $J_2E/\!/J_2^*E^*$，$I_2E/\!/I_2^*E^*$．再应用 Desargues 公理于 $\triangle EI_2J_2$，$\triangle E^*I_2^*J_2^*$，即得 $EE^*/\!/I_2I_2^*/\!/OO^*$．由此知 E^* 在 N^* 中所对应的数 k^*，即 E 在 N 中所对应的数 k，$k^*=k$．若改变单位点 I_1^*，I_2^*，则依前已证所得垂率应与 k^*，k 只差一非 0 平方因子，故此

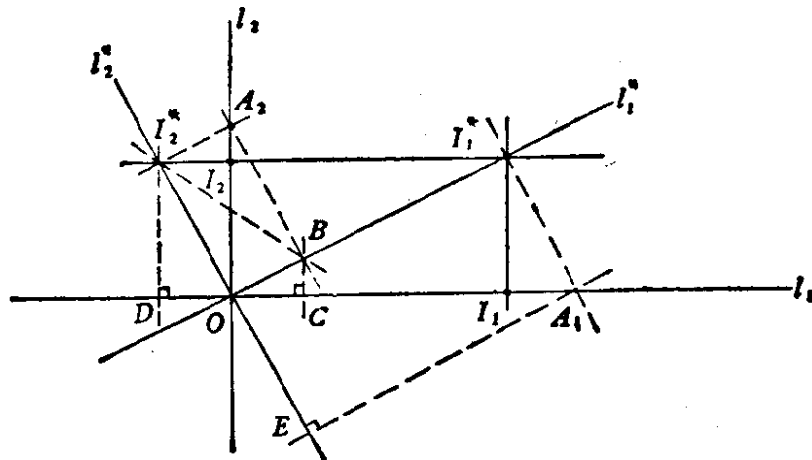


图 2.21

时定理成立.

今考虑 O^* 与 O 相同但 l_1^*, l_2^* 与 l_1, l_2 不同的情形. 如图2.21, 在 l_1 上任取单位点 I_1. 过 I_1 作直线平行 l_2 而与 l_1^* 交于 I_1^*, 作为 l_1^* 上的单位点. 又过 I_1^* 作直线平行 l_1, 而与 l_2, l_2^* 交于 I_2, I_2^*, 以作为 l_2, l_2^* 上的单位点. 对于坐标系 $C = C(l_1, l_2, I_1, I_2)$ 与 $C^* = C(l_1^*, l_2^*, I_1^*, I_2^*)$, 其相应的垂率各记为 k 与 k^*. 我们将探求 k 与 k^* 的关系.

为此, 先简记 l_1 等直线上的数系为

$$N(l_1, O, I_1) = N_1 \qquad N(l_2, O, I_2) = N_2$$

$$N(l_1^*, O, I_1^*) = N_1^* \qquad N(l_2^*, O, I_2^*) = N_2^*$$

其次过 I_1^* 作直线平行 l_2^*, 交 l_1 于 A_1, 过 I_2^* 作直线平行 l_1^*, 交 l_2 于 A_2. 又过 A_2 作直线平行 l_2^*, 交 l_1^* 于 B, 过 B 和 I_2^* 作直线平行 l_2, 交 l_1 于 C 和 D, 过 A_1 作直线平行 l_1^*, 交 l_2^* 于 E.

显然, I_1^* 在 C 与 C^* 中的坐标各为 $(1, 1)$ 与 $(1, 0)^*$, 简记为

$$I_1^* = (1, 1) = (1, 0)^*$$

由此知直线 $l_1^* = OI_1^*$ 在 C 中的斜率为

$$m_1 = 1$$

因而与 l_1^* 垂直的直线 $l_2^* = OI_2^*$ 在 C 中的斜率为

$$m_2 = -1/k$$

因 I_2^* 在 C 中的第二坐标显为 1, 故 I_2^* 在 C 中的第一坐标必为 $-k$, 即

$$I_2^* = (-k, 1) = (0, 1)^*$$

今再求 A_1 在 C^* 中的坐标. 由作法 $OI_2^*I_1^*A_1$ 与 $OI_1^*A_1E$ 都是平行四边形, 因而 E 是 I_2^* 对 O 的对称点, 故 E 在 N_2^* 中对应于 -1. 由此即知 A_1 在 C^* 中的坐标为

$$A_1 = (1, -1)^*$$

于是直线 l_1 在坐标系 C^* 中的斜率为

$$m_1^* = -1$$

再求 A_2 在 C^* 中的坐标. 由作法知 $OI_2^*A_2B$ 是平行四边形, 因此由第一章 1.2 节, $\square OI_2^*A_2B$ 的对角线 OA_2, I_2^*B 互相

平分．由于 I_2^*D, BC 都平行于 l_2，故知 O 是点偶（CD）的中点．由前已知 I_2^* 在 C 中的第一坐标为 $-k$，故 D 在 N_1 中对应于 $-k$，因而 C 在 N_1 中对应于 k． 因 BC, $I_1I_1^* \perp l_1$，故 $BC \parallel I_1I_1^*$． 因 I_1, I_1^* 各在 N_1 与 N_1^* 中对应于 1，故 C, B 在 N_1 与 N_1^* 中应对应于相同的数，即 k．由此即知 A_2 在 C^* 中的坐标为

$$A_2 = (k, 1)^*$$

于是直线 $l_2 = OA_2$ 在坐标系 C^* 中的斜率为

$$m_2^* = \frac{1}{k}$$

今直线 l_1, l_2 互相垂直，故在 C^* 中的斜率 $m_1^* = -1$ 与

$$m_2^* = \frac{1}{k}$$

应满足关系式

$$k^* \cdot (-1) \cdot \frac{1}{k} + 1 = 0$$

由此即得

$$k^* = k$$

如果在 l_1^*, l_2^* 上另取任意其它不同于 O 的点作为单位点，则由早已证明的情形，相应的垂率 k^* 与 k 只相差一非 0 平方因子．

显然任两垂直坐标系可迭次应用以上诸情形而得，故不论何时垂率都相差一非 0 平方因子，至此定理已完全证毕．

前面说明了两直线的垂直关系在一垂直坐标系统下的代数表达形式，同时引进了相应于坐标系的垂率以及作为垂直几何的一个几何特征的数组——垂方组的概念．下面将讨论对称关系的代数表达形式．

仍设一垂直坐标系 $C(l_1, l_2, I_1, I_2)$，其所定垂率设为 k．今设直线

$$L_u: \ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$$

其中 u_1, u_2 不同时为 0． 在讨论对 L_u 的对称关系时，必须设 L_u 非迷向线，因而以下将设

$$ku_1^2 + u_2^2 \neq 0$$

今设点

$$A = (a_1, a_2)$$

试求点 A 对 L_u 的对称点

$$A^* = (a_1^*, a_2^*)$$

如次.

首先,若 A 在 L_u 上,即

$$a_1u_1 + a_2u_2 + u_3 = 0$$

时,应有 $A^* = A$,即此时有

$$a_1^* = a_1 \qquad a_2^* = a_2$$

今设 A 不在 L_u 上,则 A^* 与 A 不同而确定了一直线 AA^*,其方程为

$$AA^*: (a_2^* - a_2)(x_1 - a_1) = (a_1^* - a_1)(x_2 - a_2)$$

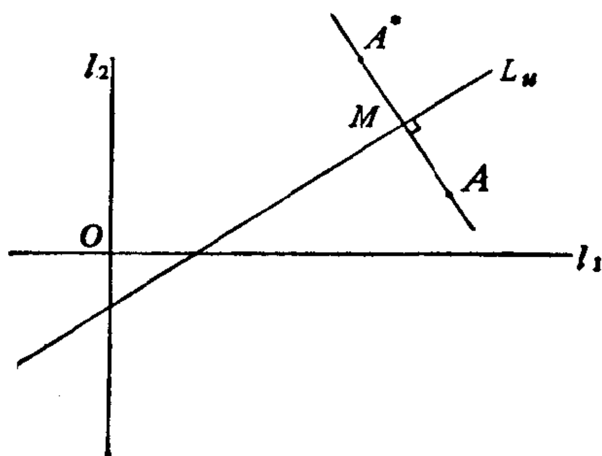


图 2.22

由于 AA^* 须与 L_u 垂直,故依定理 1′ 有

$$k(a_2^* - a_2)u_1 - (a_1^* - a_1)u_2 = 0$$

又点偶 (AA^*) 的中点 M 为

$$M = \left(\frac{a_1^* + a_1}{2}, \frac{a_2^* + a_2}{2}\right)$$

因 M 点应在直线 L_u 上,故代入 L_u 的方程得

$$u_1(a_1^* + a_1) + u_2(a_2^* + a_2) + 2u_3 = 0$$

解出最后两个方程,即得

$$a_1^* = \frac{-(ku_1^2 - u_2^2)a_1 - 2ku_1u_2a_2 - 2ku_1u_3}{ku_1^2 + u_2^2}$$

$$a_2^* = \frac{-2u_1u_2a_1 + (ku_1^2 - u_2^2)a_2 - 2u_2u_3}{ku_1^2 + u_2^2}$$

显然当 A 在 L_u 上,即 $u_1a_1 + u_2a_2 + u_3 = 0$ 时,上两式即变为 $a_1^* = a_1$, $a_2^* = a_2$. 因而在这两式中不论 A 是否在 L_u 上都普

遍成立。我们也可以把这两式合并为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{ku_1^2 - u_2^2}{ku_1^2 + u_2^2} & \dfrac{-2ku_1u_2}{ku_1^2 + u_2^2} & \dfrac{-2ku_1u_3}{ku_1^2 + u_2^2} \\ -\dfrac{2u_1u_2}{ku_1^2 + u_2^2} & \dfrac{ku_1^2 - u_2^2}{ku_1^2 + u_2^2} & \dfrac{-2u_2u_3}{ku_1^2 + u_2^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中

$$ku_1^2 + u_2^2 \neq 0$$

我们也称对应关系

$$\begin{cases} A \to A^* \\ (a_1, a_2) \to (a_1^*, a_2^*) \end{cases}$$

为对直线 L_u 的一个**反射**，记为 R_u. 上面的矩阵也记以同样的符号 R_u:

$$R_u = \begin{bmatrix} -\dfrac{ku_1^2 - u_2^2}{ku_1^2 + u_2^2} & \dfrac{-2ku_1u_2}{ku_1^2 + u_2^2} & -\dfrac{2ku_1u_3}{ku_1^2 + u_2^2} \\ -\dfrac{2u_1u_2}{ku_1^2 + u_2^2} & \dfrac{ku_1^2 - u_2^2}{ku_1^2 + u_2^2} & -\dfrac{2u_2u_3}{ku_1^2 + u_2^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^* = R_uA$$

今设过 $A = (a_1, a_2)$ 的一直线

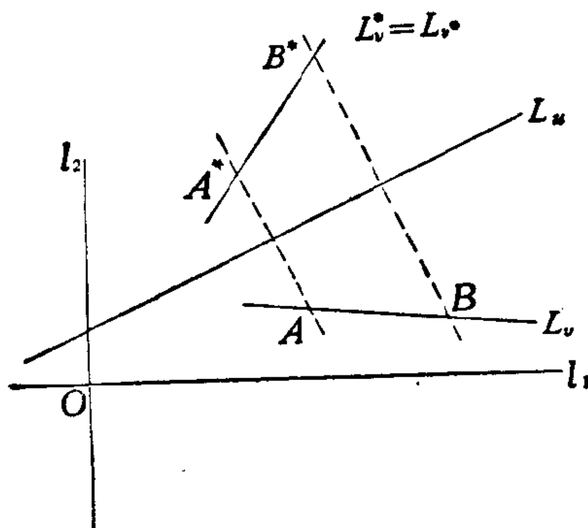


图 2.23

$$L_v:\ v_1(x_1-a_1)+v_2(x_2-a_2)=0$$

(v_1, v_2 不同时为 0). 由上节知，L_v 对 L_u 的反射也即对 L_u 的对称为一直线，记作

$$R_u(L_v)=L_v^*$$

试求 L_v^* 的方程如次. 在 L_v 上可取一点

$$B=(b_1,\ b_2)=(a_1+v_2,\ a_2-v_1)$$

其中

$$v_2=b_1-a_1,\quad -v_1=b_2-a_2$$

于是 B 对 L_u 的对称点 $B^*=(b_1^*,\ b_2^*)$ 系由下两式所定:

$$(ku_1^2+u_2^2)b_1^*=-(ku_1^2-u_2^2)b_1-2ku_1u_2b_2-2ku_1u_3$$

$$(ku_1^2+u_2^2)b_2^*=-2u_1u_2b_1+(ku_1^2-u_2^2)b_2-2u_2u_3$$

从 b_1^*, b_2^* 以及前面 a_1^*, a_2^* 诸式，可得

$$(ku_1^2+u_2^2)(b_1^*-a_1^*)=2ku_1u_2v_1-(ku_1^2-u_2^2)v_2$$

$$(ku_1^2+u_2^2)(b_2^*-a_2^*)=-(ku_1^2-u_2^2)v_1-2u_1u_2v_2$$

因 L_v^* 系由两点 A^*, B^* 所定，其方程应为

$$(b_2^*-a_2^*)(x_1-a_1^*)-(b_1^*-a_1^*)(x_2-a_2^*)=0$$

由于 $ku_1^2+u_2^2\neq 0$, 故可置

$$v_1^*=-(ku_1^2+u_2^2)(b_2^*-a_2^*)$$

$$v_2^*=(ku_1^2+u_2^2)(b_1^*-a_1^*)$$

这时 L_v^* 也可写成

$$L_v^*=L_{v*}:\ v_1^*(x_1-a_1^*)+v_2^*(x_2-a_2^*)=0$$

其中

$$v_1^*=(ku_1^2-u_2^2)v_1+2u_1u_2v_2$$

$$v_2^*=2ku_1u_2v_1-(ku_1^2-u_2^2)v_2$$

对于任两不相垂直的直线 L_u, L_v, 定义一函数

$$T(u,\ v)=\frac{u_1v_2-u_2v_1}{ku_1v_1+u_2v_2}=-T(v,\ u)$$

此时 $ku_1v_1+u_2v_2\neq 0$ 即 L_u, L_v 不相垂直，故 $T(u,\ v)$有定义. 则在 L_u, L_v 以及 L_v 对 L_u 的反射 L_{v^*}之间有关系式

$$T(u,\ v)+T(u,\ v*)=0$$

此时 L_u, L_{v^*} 也不相垂直，故 $T(u, v^*)$ 也有定义。

2.4 (无序)度量几何

在(无序)垂直几何中，两相交直线不一定有对称轴，例如，两直线中一为迷向线而另一为非迷向线时，即不可能有对称轴．但即使是两相交直线都非迷向线，仅凭垂直几何原来的那些公理也不能保证对称轴的存在．本节将证明对称轴的存在实质上相当于在几何中可引进全合概念与度量概念．虽然由于垂直几何中并无次序关系，因此这些全合与度量的概念不具有象常用几何那样的全部性质，但至少可以保留相当重要的一部份性质，例如勾股定理.

为此我们将引入下面的公理.

对称轴公理 S 任两非迷向线的相交直线必有一对称轴.

由 2.2 节的性质 5，这时两相交直线恰有两个对称轴.

我们称满足对称轴公理的(无序)垂直几何为(无序)**度量几何**．所以称之为度量几何的原因是因为有了对称轴公理即可引进某种度量，详见下述.

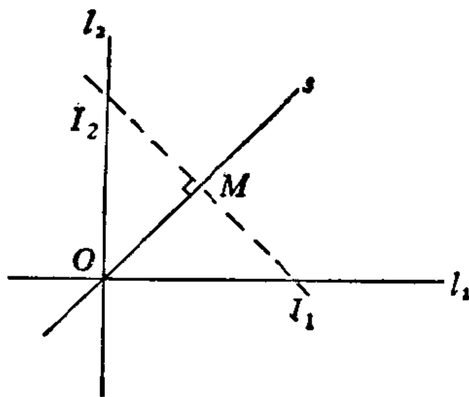


图 2.24

首先，我们将讨论无序度量几何中的垂率与垂方组.

为此如图 2.24，试任取两相交而互相垂直的直线 l_1 与 l_2，并以此作为坐标轴．今在 l_1 上任取一不同于交点 O 的点 I_1 作为 l_1 上的单位点．因 l_1, l_2 显然不为迷向线，故由对称轴公理，可取 l_1, l_2 的一个对称轴，设为 s，作 I_1 对 s 的对称点 I_2．于是 I_2 在 l_2 上，I_2 将取之为 l_2 上的单位点．这时垂直坐标系 $C(l_1, l_2, I_1, I_2)$ 的垂率 $k=1$，试证之如次.

对称轴 s 应是点偶 (I_1I_2) 的垂直平分线，故经过 (I_1I_2) 的中

点 $M=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$. 因之 s 的斜率为 $m=\frac{1}{2}\Big/\frac{1}{2}=1$. 另一面，$I_1=(1,\ 0)$，$I_2=(0,\ 1)$，故 I_1I_2 的斜率为 $m'=-1$. 由于 s 与 I_1I_2 垂直，故其斜率满足关系式 $kmm'+1=0$

由此即得 $k=1$.

今以两相交垂直的直线为坐标轴，并以这两直线上对称于这两直线的一对称轴的两个点为单位点，由此组成的垂直坐标系称为无序度量几何中 **Descartes** 坐标系，相应的点的坐标为 **Descartes** 坐标. 依据上节，上面的结果可表为下述.

定理 1 （无序）度量几何的垂方组系由非 0 平方数所组成. 特别是一个 Descartes 坐标系的垂率为 1.

依据上节，则由这一定理可知，对一 Descartes 坐标系而言，两直线

$$L_u:\ u_1x_1+u_2x_2+u_3=0$$
$$L_v:\ v_1x_1+v_2x_2+v_3=0$$

（u_1, u_2 不同时为 0，v_1, v_2 也不同时为 0），互相垂直的充要条件为

$$u_1v_1+u_2v_2=0$$

而直线 L_u 为迷向线的充要条件为

$$u_1^2+v_1^2=0$$

对于斜率 m_u, $m_v\neq 0$ 或∞的两直线 L_u, L_v 来说，条件也可写成 $m_um_v+1=0$. 这些都与常用几何中的情形相同.

今再引入全合的概念如次.

若 A_1, A_2 两点对一非迷向线的直线各对称于 B_1, B_2 两点，则称点偶 (A_1A_2) 与 (B_1B_2) 全合. 若点偶 (A_1A_2) 与 (B_1B_2) 全合，(B_1B_2) 与 (C_1C_2) 全合，则也称点偶 (A_1A_2) 与 (C_1C_2) 全合. 点偶 (A_1A_2) 与 (B_1B_2) 全合时记作

$$(A_1A_2)\equiv(B_1B_2)$$

全合关系具有下面一些简单的性质.

性质 1 点偶的全合关系是一等价关系.

证 全合关系的对称性与传递性直接从全合的定义可以得

知．今证自反性如次．

若 A_1，A_2 不同，而 A_1，A_2 的连线 l 非迷向线，则因 A_1，A_2 对 l 的对称点即为 A_1，A_2，故由定义知 $(A_1A_2)\equiv(A_1A_2)$．不论何时恒可在平面上任取一非迷向线的直线 l，命 A_1，A_2 对 l 的对称点为 A_1'，A_2'，则由定义有

$$(A_1A_2)\equiv(A_1'A_2')$$

但因 A_1'，A_2' 对 l 的对称点即为 A_1，A_2，故也有

$$(A_1'A_2')\equiv(A_1A_2)$$

于是依定义中的对称性，即有 $(A_1A_2)\equiv(A_1A_2)$．

性质2 对任意点偶 (A_1A_2) 有

$$(A_1A_2)\equiv(A_2A_1)$$

证 若 A_1，A_2 不同，而连线 A_1A_2 非迷向线，则可取 (A_1A_2) 的垂直平分线 l' 为对称轴．由于 A_1，A_2 各对称于 A_2，A_1，故有 $(A_1A_2)\equiv(A_2A_1)$．

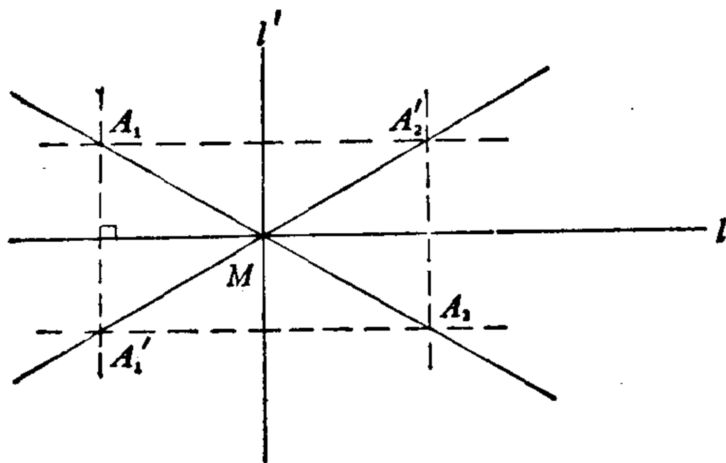


图 2.25

如图 2.25，今设 A_1A_2 是迷向线，则可取 (A_1A_2) 的中点 M，并依垂直公理 O_4 过 M 作任一非迷向线的直线 l．又依垂直公理 O_2，过 M 作 l 的垂线 l'，作 A_1 对 l 的对称点 A_1'．因 $l'/\!/A_1A_1'$ 而 M 是 (A_1A_2) 中点，故 l' 过 $(A_1'A_2)$ 的中点．又因 l 过 (A_1A_1') 的中点与 (A_1A_2) 的中点 M，故 $l/\!/A_1'A_2$．于是 $l'\perp A_1'A_2$，因而 A_1' 对 l' 的对称点即 A_2．同样，A_2 对 l 的对称点为 A_2' 时，A_2' 在直线 $A_1'M$ 上，且 M 是 $(A_1'A_2')$ 的中点．又 A_2' 对 l' 的对称点即 A_1，因

而依 l, l' 为对称轴，有 $(A_1A_2)\equiv(A'_1A'_2)$，$(A'_1A'_2)\equiv(A_2A_1)$，故 $(A_1A_2)\equiv(A_2A_1)$. 证毕.

性质3 平行四边形 $ABCD$ 的两组对边互相全合，即

$$(AB)\equiv(CD)\qquad(AD)\equiv(BC)$$

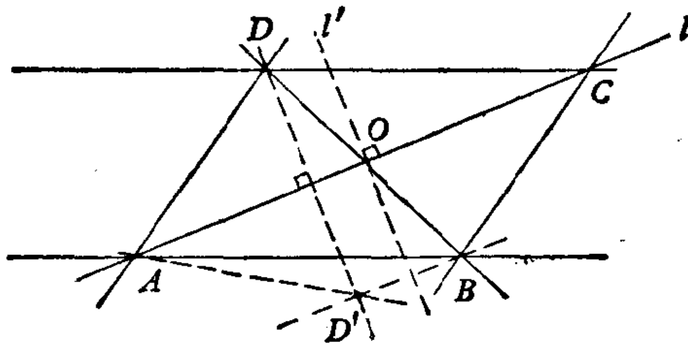


图 2.26

证 依第一章 1.2 节，如图 2.26，▱$ABCD$ 的对角线 AC，BD 互相平分于其公共交点 O，即 O 是点偶 (AC) 与 (BD) 的共同中点.

今先设 AC，BD 中至少有一非迷向线，例如 AC 非迷向线. 于是命 $AC=l$，又过 O 作 l 的垂直线 l'. 命 D 对 l 的对称点为 D'，则如性质 2 的证明中那样，D' 对 l' 的对称点即为 B. 今依 l 为对称轴时，有

$$(AD)\equiv(AD')$$

又依 l' 为对称轴时，有

$$(AD')\equiv(CB)$$

故有 $(AD)\equiv(CB)$，或依性质 2，即 $(AD)\equiv(BC)$. 同样也有 $(AB)\equiv(CD)$.

如图 2.27，今设对角线 AC，BD 都是迷向线. 依 2.2 节，一个三角形的三条边线不能都是迷向线，因而诸直线 AB，BC，CD，AD 都不能是迷向线. 于是可过 O 作直线 l 与 AB，CD 垂直时必与之相交，且设交点各为 E 与 F. 今过 C，D 各作直线与 AB 垂直，且各与之交于 A' 与 B'. 则因 O 是 (AC) 中点也是 (BD) 中点，故 E 是 (AA') 中点也是 (BB') 中点. 因为以 l 为对称轴

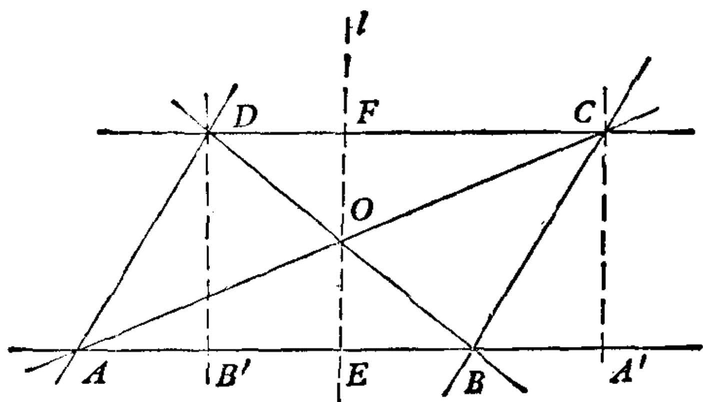


图 2.27

时，A，B 的对称点各为 A'，B'，而有

$$(AB)\equiv(A'B')$$

又平行四边形 $A'B'DC$ 的两组对边 $A'B'$，CD 各与 $A'C$，$B'D$ 垂直．由此易证

$$(A'B')\equiv(CD)$$

由全合的传递性即得 $(AB)\equiv(CD)$．同样也有$(BC)\equiv(AD)$．至此定理已完全证明．

以上关于全合的定义及其一些性质(定理1除外)，实际上并不真正用到对称轴公理，因而仍可看成是垂直几何的内容．但对于下面的一些结果，对称轴公理将是不可缺少的．

首先迷向线上两点所成点偶显然不可能与非迷向线上两点的点偶全合．故以后全合关系可限制在点偶位于非迷向线上的情形．另一方面，由于对称轴公理任两非迷向直线都有对称轴，因而位于任两非迷向直线上的点偶都可考虑其是否全合的问题．

为此在平面上先任取一固定的非迷向直线 l，并在其上任意取定两点 I，J 与其中点 O．对于这些取定的 l 与 I，J 而言，称(IJ)为一标准点偶，于是可将对称轴公理描述成下面的形式．

转置公理 δ' 在任一非迷向直线 l' 上取定一点 O' 后，即在 l' 上恰有两点 I'，J'，其中点为 O'，且使

$$(I'J')\equiv(J'I')\equiv(IJ)$$

例如，若非迷向线 l' 经过 O 点但不同于 l，且所取 O' 即 O，则

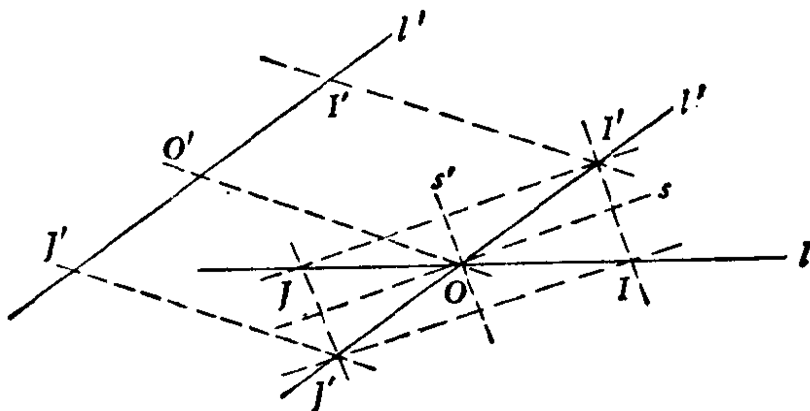


图 2.28

命 s, s' 为 l, l' 的两个对称轴,这时 I', J' 即 I, J 对 s 与 s' 的对称点. 若 l' 不经过 O 也不与 l 平行时，可过 O 作 $l''/\!/l'$，在上取 $O''=O$，且取 I'', J'' 为 I, J 对 s, s' 的对称点. 过 I'', J'' 作直线平行 OO' 而与 l' 交于 I', J' 时，I', J' 即为转置公理中以 O' 为中点的 l' 上的两个点.

今取定直线 l 与其上标准点偶 (IJ) 及其中点 O 后,可在 l 上确定 Desargues 数系 $N(l, O, I)$ 与 $N(l, O, J)$. 同样对任一 l' 与其上一点 O' 以及全合于 (IJ) 且以 O' 为中点的点偶 $(I'J')$, 也可在 l' 上确定数系 $N(l', O', I')$ 与 $N(l', O', J')$. 这样的数系称为是**相配**的,且各以 O 与 O' 为**中心**.

今设在 l 上任意两点 A, B. 又设在另一非迷向线 l' 上两点 A', B',使 $(A'B')=(AB)$. 若 A, B 在数系 $N(l, O, I)$ 中对应于数 a, b, 则在数系 $N(l, O, J)$ 中将对应于 $-a, -b$. 又对 l' 上的相配数系 $N(l', O', I')$ 与 $N(l', O', J')$ 而言,易证有 c, d, 使 A', B' 各对应于 $a'=a+c$, $b'=b+c$, 或 $a'=-a+d$, $b'=-b+d$. 于是不论何时,都有

$$(b-a)^2=((-b)-(-a))^2=(b'-a')^2$$

换言之，对于互相全合的点偶，在其所在直线上的任一相配数系中，所对应两数之差的平方为一常数，我们称这一常数为点偶 (AB) 的**距方**,记作 $\overline{\overline{AB}}$. 这一结果可归结为下面的重要性质:

性质 4 互相全合的非迷向点偶有相同的距方．当点偶的两点相同时，距方为 0．当点偶的两点不相同时，距方不为 0 而为几何附属数域中一非 0 数的平方，这一非 0 数并非唯一确定，而仅确定到一符号．

这里非迷向点偶是指两点不相同时不在一迷向线上而言．又距方指对一已确定的标准点偶而言．

今称有两边线互相垂直而三条边线都非迷向线的三角形为勾股形，称第三边线为勾股形的斜边，称两垂直边线的交点为勾股形的顶端．下面关于勾股形的定理乃是本节的主要定理，也是引入对称轴公理或转置公理的主要收获．

定理 2（勾股定理） 设勾股形 ABC 的顶端在 C，则点偶 (AB)，(AC)，(BC) 的距方之间有关系式

$$\overline{\overline{AB}} = \overline{\overline{AC}} + \overline{\overline{BC}}$$

在未证此定理之前，先证下述引理：

引理 设勾股形 ABC 的顶端为 C．从 C 作 AB 的垂线与 AB 交于 D．在直线 AB，AC 上各引进以 A 为中心的相配数系时，设 C，B，D 各对应于 c，b，d，则有关系式

$$bd = c^2$$

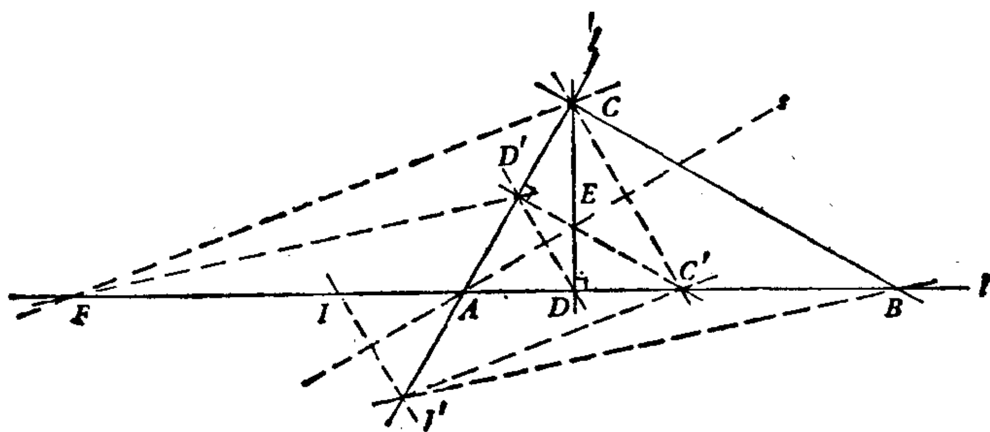


图 2.29

证 如图 2.29，设 $AB = l$ 与 $AC = l'$ 上以 A 为中心的相配数系各为 $N = N(l, A, I)$ 与 $N' = N(l', A, I')$，l 与 l' 的一

个对称轴为 s，I 对 s 对称于 I'. 命 D 对 s 的对称点为 l' 上的 D'，而 C 对 s 的对称点为 l 上的点 C'，则 CC'，DD' 都垂直于 s. 又 CD 对 s 的对称线即 $C'D'$，故二者交于 s 上的一点 E，且由 2.2 节性质 3 或垂心公理，从 $CD \perp l$ 知 $C'D' \perp l'$，因而 $C'D' /\!/ BC$. 今过 C 作直线平行于 $I'C'$，与 l 交于 F. 应用 Pascal 定理于交线 l，l' 以及其上的点 F，C'，B 与 I'，C，D' 得 $FD' /\!/ BI'$. 依假设，B，C'，D 各对应于数系 N 中的 b，c，d. 同样，C，D' 也各对应于 N' 中的 c，d. 于是依数系的乘法定义，点 F 在数系 N 中既对应于 c^2 又对应于 bd. 故有 $c^2 = bd$. 如所欲证.

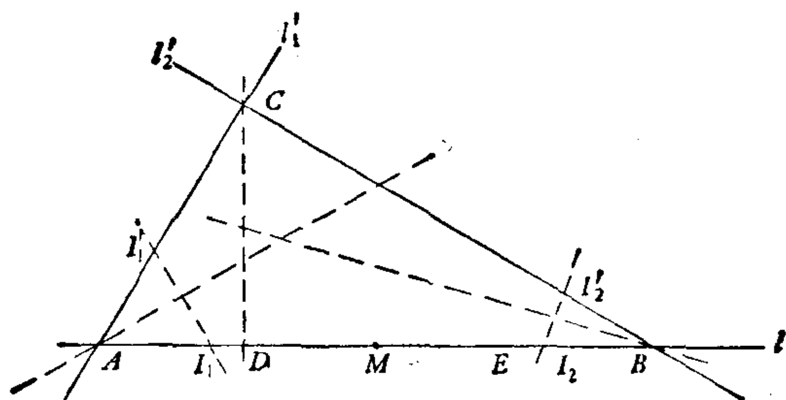


图 2.30

勾股定理的证明. 如图 2.30，命 $AB = l$，$AC = l_1'$，$BC = l_2'$. 过 C 作直线垂直于 l 并与 l 交于 D. 作点偶 (AB) 的中点 M，并作 D 对 M 的对称点 E. 在 l，l_1' 上作相配数系 $N_1 = N(l, A, I_1)$ 与 $N_1' = N(l_1', A, I_1')$. 命 I_1 对 M 的对称点为 I_2. 在 l 与 l_2' 上又作相配数系 $N_2 = N(l, B, I_2)$ 与 $N_2' = N(l_2', B, I_2')$.

设 B，D 对应于 N_1 中的 b_1，d_1，

C 对应于 N_1' 中的 c_1，

A，D 对应于 N_2 中的 a_2，d_2，

C 对应于 N_2' 中的 c_2.

则由引理有

$$b_1 d_1 = c_1^2$$
$$a_2 d_2 = c_2^2$$

显然有

$$a_2 = b_1$$

又 D 在 N_2 中对应的数 d_2 即 E 在 N_1 中所对应的数，而 M 在 N_1 与 N_2 中都对应于 $a_2/2 = b_1/2$. 由于 M 是 D, E 的中点，故得

$$a_2 = b_1 = d_1 + d_2$$

今从距方定义有

$$c_1^2 = \overline{\overline{AC}} \qquad c_2^2 = \overline{\overline{BC}}$$

$$b_1^2 = a_2^2 = \overline{\overline{AB}}$$

结合以上诸式即得 $\overline{\overline{AB}} = \overline{\overline{AC}} + \overline{\overline{BC}}$. 如所欲证.

从勾股定理立得以下定理.

定理 3 在一 Descartes 坐标系中若两点 P, Q 的坐标各为

$$P = (x_1, x_2) \qquad Q = (y_1, y_2)$$

则 (PQ) 的距方为

$$\overline{\overline{PQ}} = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$$

这里假设在 P, Q 不相同时，PQ 非迷向线.

迄今为止我们只谈及点偶的全合而没有涉及角的全合问题. 虽然在无序度量几何中，除一些垂直公理外又添加了一条对称轴公理，但仍无线段一类概念. 因而我们引入了点偶的距方，而没有引进线段的长度或两点的距离. 同样，在这种几何中也无半直线与角的概念，因而不能象常用几何那样谈到相交直线的四个交角. 但我们仍不妨称两相交直线构成了一个全角. 如果两直线为 l, l'，交点为 O，则这一全角记为 $\measuredangle O(l, l')$ 或 $\measuredangle O(l', l)$. 在不致引起混淆时也简记为 $\measuredangle O$ 或 $\measuredangle(l, l')$. 我们将推广之于两直线 l, l' 相合以及其上一点 O 的情形. 这时的全角 $\measuredangle O(l, l)$ 称为平角. 在两直线 l, l' 相垂直且相交于 O 时，所成的全角也称为直角. 不论何时，以后凡提到全角时，将局限于 l, l' 都非迷向线的情形. 这时的 O 点称为全角的顶点，l, l' 则称为全角的两条边线. 依照对称轴公理，一个全角的两条边线不相重合，即全角非平

角时，恰有两条对称线，我们称之为这一全角的分角线.

类似于点偶的全合，我们还将定义两个全角 $\measuredangle O(l_1, l_2)$ 与 $\measuredangle O'(l'_1, l'_2)$ 全合. 如果有一非迷向线的直线 s，使 O, l_1, l_2 对 s 的对称点与线各为 O', l'_1 与 l'_2，又若 $\measuredangle O(l_1, l_2)$ 与 $\measuredangle O'(l'_1, l'_2)$ 全合，$\measuredangle O'(l'_1, l'_2)$ 与 $\measuredangle O''(l''_1, l''_2)$ 全合，则我们也定义 $\measuredangle O(l_1, l_2)$ 与 $\measuredangle O''(l''_1, l''_2)$ 全合. 若两全角 $\measuredangle O(l_1, l_2)$ 与 $\measuredangle O'(l'_1, l'_2)$ 全合，则记为

$$\measuredangle O(l_1, l_2) \equiv \measuredangle O'(l'_1, l'_2)$$

又在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 之间，设有关系式

$$(AB) \equiv (A'B') \qquad (AC) \equiv (A'C') \qquad (BC) \equiv (B'C')$$

$$\measuredangle A(AB, AC) \equiv \measuredangle A'(A'B', A'C')$$

$$\measuredangle B(BA, BC) \equiv \measuredangle B'(B'A', B'C')$$

$$\measuredangle C(CA, CB) \equiv \measuredangle C'(C'A', C'B')$$

则称 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全合，简记为

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

显然有下面的性质:

性质 5 $\measuredangle O(l_1, l_2) \equiv \measuredangle O(l_2, l_1)$，且角的全合关系是一等价关系. 又三角形间的全合关系也是等价关系.

定理 4 设两三角形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的边线都非迷向线而有关系

$$(AB) \equiv (A'B') \qquad (AC) \equiv (A'C') \qquad (BC) \equiv (B'C')$$

则这两三角形全合.

证 若 A' 与 A 不同，且 AA' 非迷向线，则可作点偶 (AA') 的垂直平分线 s. 命 B', C' 对 s 的对称点为 B'', C''，则显有 $\triangle A'B'C' \equiv \triangle AB''C''$. 若 B'' 与 B 不同，则在 AB, AB'' 两直线不重合时，可取其分角线之一为 s'，而在 AB, AB'' 重合时，可过 A 作其垂线 s'. 命 C'' 对 s' 的对称点为 C'''，则显有

$$\triangle AB''C'' \equiv \triangle ABC'''.$$

由于三角形的全合关系是一等价关系，故为证明 $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$ 只需考虑 $\triangle A'B'C'$ 的 A', B' 各与 A, B 重合这一情形即可. 在

AA' 是迷向线时，也不难归结到这一情形.

为此试取一 Descartes 坐标系，如图 2.31. 以 A 为原点，直线 AB 为坐标轴之一 l_1. 又在坐标轴上的单位点将选取使其上所定数系是与标准数系相配的数系. 设各点的坐标为

$$B = (b, 0)$$
$$C = (c, d)$$
$$C' = (c', d')$$

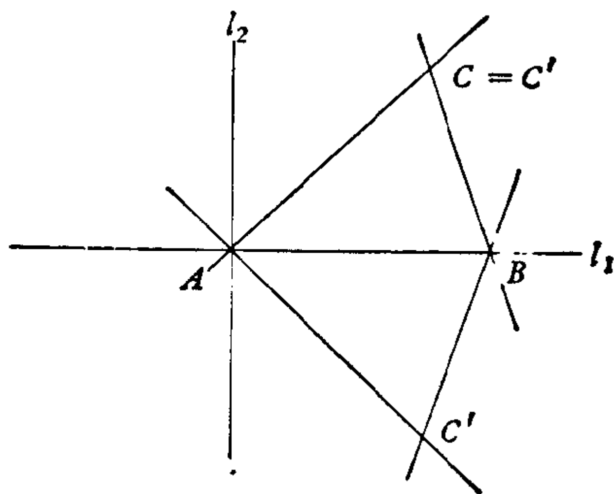


图 2.31

因点偶的全合相当于距方的相等，故依定理 3，从

$$(AC) = (AC'), \qquad (BC) = (BC')$$

得

$$c^2 + d^2 = c'^2 + d'^2$$
$$(c-b)^2 + d^2 = (c'-b)^2 + d'^2$$

二式相减得

$$2cb = 2c'b$$

因 B 不重合于 A，故 $b \neq 0$. 由此得

$$c = c'$$

又从第一式得 $d^2 = d'^2$，即

$$d = d' \text{ 或 } d = -d'$$

在前一情形 C' 与 C 重合，而在后一情形 C' 对 AB 直线对称于 C，故不论何时都有 $\triangle ABC \equiv \triangle ABC'$. 证毕.

与定理 4 不同，常用几何中的另两个三角形全合定理在这里并不成立. 另一方面，点偶虽不能定义距离或长度，但可定义距方作为两点间相距的某种量度，而具有常用几何中距离或长度概念的部份性质. 同样，一个全角虽不能定义其大小，但也可引进某种量度具有常用几何中角的大小的部份性质. 例如上节末两相交直线的 T 函数的平方即可作为这样一种量度. 总之，无序度量几何

保留了常用几何中的部份度量性质，但由于没有次序概念，这些度量性质与常用几何相比是不完全的．下节将进一步讨论这一问题．

2.5 次序公理与有序度量几何

在前几节中从关联公理 HI，平行公理 HIV，无限公理与 Desargues 公理 D，以及垂直公理 O 与对称轴公理 S，建立了无序垂直几何与无序度量几何．虽然，在这种几何中可以部分地引入通常的全合关系与度量性质，但因无次序概念，几何的附属数域的数无正负，更不能比较数的大小，所以相应的全合关系与度量性质与常用几何相比是不完全的．为此必须引入次序或类似的概念才有此可能．这种概念与公理可以用不同的方式引进，本书将仍依据 Hilbert《几何基础》原著．Hilbert 该书先后诸版，关于次序公理曾有多次修改，内容都略有不同，但最终结果还是相同的．虽然第一版的公理不象后来几版那样是完全独立的，但我们的目的不在于公理之间的逻辑关系和独立与否，故仍将以第一版为准叙述如下．

次序公理牵涉到直线上三个不同的点，其中包括一点在另两点之间这种不加定义的基本概念．此概念满足以下诸（平面上的）公理．

次序公理 HII

HII 1 设直线上三个不同的点 A，B，C，若 B 在 A，C 之间，则 B 也在 C，A 之间．

HII 2 对直线上的任两不同的点 A 与 C，恒有另一点 B 在 A 与 C 之间，又有另一点 D，使 C 在 A 与 D 之间．

HII 3 任给直线上的三个不同的点 A，B，C，必有且恰有以下三种情形之一：B 在 A，C 之间，A 在 B，C 之间，C 在 A，B 之间．

给定两个不同的点 A，B，在 A，B 所定直线上所有那些在

A, B 之间的点的全体称为一个线段，记作 $|AB|$. 依公理 HII1 也可记作 $|BA|$, A, B 称为线段 $|AB|$ 或 $|BA|$ 的端点. 象通常那样,我们也可定义以 A, L 为端点由线段 AB, BC, $\cdots$, KL 所组成的一个折线 $|ABC\cdots KL|$ 和多边形以及简单多边形,等等. 不再详述.

HII 4 (Pasch 公理) 设 A, B, C 是不在同一直线上的三点. 若直线 l 通过线段 $|AB|$ 中的一点,则 l 或通过 C,或通过线段 $|AC|$ 中的一点,或通过线段 $|BC|$ 中的一点,三者必居其一.

从关联公理 HI 与次序公理 HII1—HII4 可以得出以下一些关于分隔的性质:

分隔性质 1 给定一直线 l 与其上一点 O, 则 l 上不同于 O 的点可分成两个部分,称为 l 上 O 点的两侧,使两点 A, B 分处 O 的异侧时,O 在 A, B 之间,而在 A, B 位于 O 的同侧时, O 不在 A, B 之间. 这时,这两部分将各称为 l 上从 O 起始的一条半直线或射线.

分隔性质 2 任给平面上的一直线 l, l 外的点可分成两部分,称为平面上 l 的两侧. 使两点 A, B 位于 l 的同侧时,线段 $|AB|$ 与 l 无公共点,而当 A, B 位于 l 的异侧时,任一连结 A, B 的折线 $|A\cdots B|$ 都与 l 有公共点.

分隔性质 3 从同一点 O 出发但不位于同一直线上的两条半直线 l_1, l_2 称为构成一个角,以 O 为顶点而以 l_1, l_2 为边线,记作 $\measuredangle(l_1, l_2)$ 或 $\measuredangle(l_2, l_1)$. 于是不在角上(既非顶点又不在边线上)的点被角分成内部与外部两部分. 同位于内部(或外部)的任意两点可以一线段(或一折线)相连而不与角相遇. 但如果两点中的一点位于内部,另一点位于外部时,连结这两点的任一折线必与角相遇. 又内部是以下两部分的公共部分: 其中一部分是边线 l_1 所在直线含有边线 l_2 上点的那一侧, 而另一部分是边线 l_2 所在直线含有边线 l_1 上点的那一侧. 至于外部则由既不在内部又不在角上的那些点所组成.

分隔性质 4 任给一简单多边形 P. P 以外的点可分成两部

分，称为 P 的内部与外部．使两点 A, B 同位于内部或同位于外部时，必有一连结 A, B 的折线 $|A\cdots B|$ 与 P 不相遇，而当 A, B 分处于 P 的内部与外部时，任一连结 A, B 的折线 $|A\cdots B|$ 都必与 P 相遇．又内部与外部的区分在于：有直线完全位于 P 的外部，但没有一条直线能完全位于 P 的内部．

今设一多边形 P，如果对于 P 的任两相邻顶点，P 的其它顶点都在这两相邻顶点所定直线的同侧，则称这样的多边形为一凸多边形．称任两不相邻顶点所定线段为这一凸多边形的一条对角线段．于是有下面的性质：

分隔性质 5 凸多边形的任一对角线段都在这一多边形的内部．

这些分隔性质的证明都颇为烦琐，有的还不太容易．读者可参看 Hilbert《几何基础》一书俄文与中文译本的俄译者注，Kerekjarto 的著作[1]，或 Veblen 与 Young 的著作[1]第二卷最后一章等．

以下将假设平面除满足(无序)度量几何的全部或部分公理外还满足次序公理 HII1—HII4．这样的几何称为**有序度量几何**或有序 Pascal 几何，有序垂直几何，等等．在这种有序几何中，从分隔性质容易得出以下的一些推论：

推论 1 设两不同直线 l_1, l_2 上各有点 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 互不相同，且不同于可能有的交点．若 $A_1A_2 \| B_1B_2 \| C_1C_2$，则是否 B_1 在 A_1, C_1 之间(或 C_1 在 A_1, B_1 之间)，要取决于是否 B_2 在 A_2, C_2 之间(或 C_2 在 A_2, B_2 之间)而定．若 l_1, l_2 相交于 O 而 C_1, C_2 与 O 相重合，则在 $A_1A_2 \| B_1B_2$ 时也有同样结论．

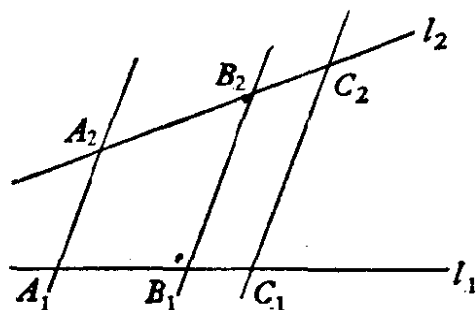


图 2.32

证 试考虑前一情形．如图 2.32，因 $A_1A_2 \| B_1B_2$，故 A_1, A_2 两点位于直线 B_1B_2 的同侧．同样 C_1, C_2 也在直线 B_1B_2 的同侧．故 A_1, C_1 是否位于 B_1B_2 的

异侧，视 A_2, C_2 是否位于 B_1B_2 的异侧而定． 也即 B_1 是否在 A_1, C_1 之间，视 B_2 之是否在 A_2, C_2 之间而定．其它情形仿此．

推论 2 三角形与平行四边形都是凸多边形．

证 由定义自明．

推论 3 两不同点的中点必在这两点之间．

证 略．

今在一直线 l 上固定两点 O 与 I，并以之作为 0 与 1 而确定一 Desargues 数系 $N=N(l, O, I)$． 我们将把 l 上与 I 在 O 同侧的那些点所对应 N 中的数定义为 N 中的**正数**，而把与 I 在 O 异侧的那些点所对应 N 中的数定义为 N 中的**负数**． 特别有，1 是正数，而由推论 3 知 -1 是负数．由于推论 1，如果在另一直线 l' 上取 O', I' 并以之作为 0 与 1 而作 Desargues 数系 $N'=N(l', O', I')$时，在确定同构 $N \approx N'$ 下，N 中的正数将对应于 N' 中的正数，N 中的负数也将对应于 N' 中的负数．因此我们可据之以定义在几何附属数域中 0 以外数的**正**与**负**，也可以定义任一数的**绝对值**．

下面的定理可视为本节的主要定理．

定理 1 有序 Pascal 几何的附属数域 $\mathbf{N}$ 在以上正负数定义之下成一**有序域**，即有以下三性质：

1．若 a 为正数，则 $-a$ 为负数．反之，若 a 为负数，则 $-a$ 为正数．

2．若 a, b 都是正数，则 $a+b$ 也是正数．

3．若 a, b 都是正数或都是负数，则 ab 是正数．若 a, b 中一是正数而另一是负数，则 ab 是负数．

证

1．在直线 l 上取 O 与 I 作为 0 与 1 以定义 Desargues 数系 $N=N(l, O, I)$． 设 $a \neq 0$ 与 $-a \neq 0$ 作为 N 中的数，且各对应于 l 上的点 A 与 B，则 O 为 A, B 的中点．由推论 3，A, B 位于 l 上 O 的异侧，故对应的数 a 与 $-a$ 一个为正，而另一个为负．又因为 1 为正数而 -1 为负数，故由于 $-a=(-1)\cdot a$ 此性质亦可从第三个性质得出．

2. 今设本定理的第 3 个性质成立而证第 2 个性质. 如前在

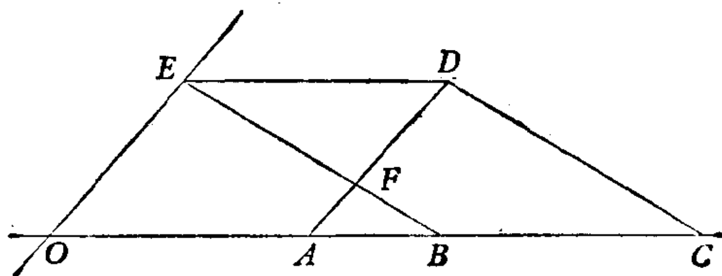


图 2.33

l 上取 O, I, 并作数系 N. 如图 2.33, 设 a, b 在 l 上对应于点 A 与 B, 并设 C 对应于 $a+b$. 则作平行四边形 $OADE$, 依定义, $BCDE$ 也是平行四边形.

在 $a=b$ 时 A 是 O, C 的中点,故 A, C 在 0 的同侧,而 c 与 a 同为正数. 为此设 $a \neq b$, 并不妨设 A 在 O, B 之间,因 O, E 在直线 AD 的同侧,而 O, B 在 AD 的异侧,故 B, E 在 AD 异侧而 $|BE|$ 线段必与直线 AD 相交,设交点为 F. 因 $|EF|$ 线段不能再有 l 上的点,即 E, F 在 l 同侧而 E, D 也在 l 同侧,故 D, F 也在 l 同侧, 因而线段 $|DF|$ 不能与 l 相遇, 或 A 不在 D, F 之间. 同样线段 $|BF|$ 不能再与直线 DE 相遇, 故 B, F 在 DE 同侧, A, B 也在 DE 同侧. 于是由 A, F 在 DE 同侧知 D 不能在 A, F 之间,因而知 F 必在 A, D 之间而由推论 1, B 在 A, C 之间. 故在 l 上 C 与 A, B 都在 O 的同侧而知 $a+b$ 也是正数.

3. 设 l, O, I 与 N 如前,并设 A, B 在 l 上各对应于数 a, b. 今过 O 任作另一直线 l', 并在 l' 上任取一不同于 O 的点 I'. 过 B 作直线平行于 II' 而与 l' 交于 B', 又过 B' 作直线平行于 AI' 而与 l 交于 C. 则依乘法定义, C 所对应的数 c 即为 ab: $c=ab$.

今依推论 1, A 与 C 在 l 上位于 O 的同侧与否,视 I', B' 在 l' 上位于 O 的同侧与否而定. 又 I', B' 是否在 l' 上 O 的同侧,又视 I, B 是否在 l 上 O 的同侧而定. 由此知 a, c 是否同为正负与否, 视 b 为正或为负而定. 第三个性质得证. 见图 2.34.

从这一定理立得下面的定理.

定理 2 在有序 Pascal 几何的附属数域 **N** 中引入大小概念 $>$

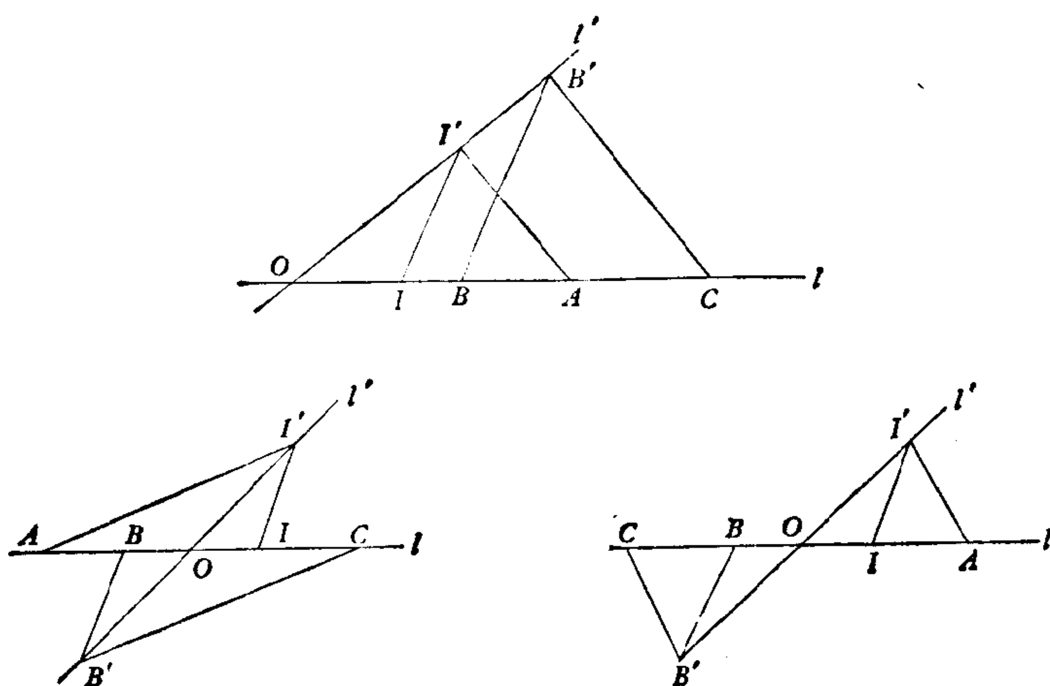


图 2.34

与<如下：

$$a > 0 \Longleftrightarrow a \text{ 为正数}$$

$$a < 0 \Longleftrightarrow a \text{ 为负数}$$

$$b > a \Longleftrightarrow b - a > 0 \Longleftrightarrow a < b \Longleftrightarrow a - b < 0$$

于是数域**N**满足第一章1.4节中关于数系的1—17诸公理.

另一个重要定理如下：

定理3 在有序度量几何中迷向线不存在.

证 试取一 Descartes 坐标系，若有迷向线L存在，可设其方程为

$$L: u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$$

其中u_1, u_2不同时为0(实际上都不为0). 由于 Descartes 坐标的垂率为1，故有

$$u_1^2 + u_2^2 = 0$$

于是有 $-1 = (u_1/u_2)^2$. 但不论 u_1/u_2 的正负如何，依定理1中的第三个性质，$(u_1/u_2)^2$ 恒为正数，但-1是负数，故不合理，而迷向线不存在.

我们曾经定义过点偶的全合与全角的全合. 但不象 Hilbert

对常用几何的公理系统那样，我们没有将全合作为基本概念来引入，更无所谓全合公理．事实上也并不需要．因为在这一有序度量几何中，线段的全合与角的全合可以作为派生概念依据其它公理定义出来．为此试考虑任一直线 l，依据定理 3 这一直线不可能是迷向线．今设在任一直线上的三个点 A, B, C 并设 B 在 A, C 之间．命 A, B, C 对 l 的对称点为 A', B', C'，则依 2.2 节，A', B', C' 也在一直线上．不仅如此，由于 $AA' \| BB' \| CC'$，故依推论 1，B' 也在 A', C' 之间，因而线段 $|AC|$ 对 l 的反射也是一个线段 $|A'C'|$．同样，一条半直线或射线对 l 的反射也是一条半直线或射线，一个角对 l 的反射也是一个角．于是我们可以自然地定义线段的全合与角的全合．如果它们可以通过若干次反射来获得，这时全合仍将如前使用同样的符号 $\equiv$．对于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 来说，我们说它们全合，即

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

如果

$$|AB| \equiv |A'B'|,\ |AC| \equiv |A'C'|,\ |BC| \equiv |B'C'|,$$

且

$$\measuredangle BAC \equiv \measuredangle B'A'C',\ \measuredangle ABC \equiv \measuredangle A'B'C',$$
$$\measuredangle ACB \equiv \measuredangle A'C'B'.$$

这里 $\measuredangle BAC$ 是指从 A 出发而经过 B, C 的两条半直线所成的角，其它同此．于是 2.4 节的定理 4 即可加强成下面的形式．

定理 4 若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的

$$|AB| \equiv |A'B'|,\ |AC| \equiv |A'C'|,\ |BC| \equiv |B'C'|,$$

则这两三角形全合(依照上面的新定义)：

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

在无序度量几何中，关于两三角形的全合，虽然有相当于常用几何中 *s.s.s* 的定理，但与 *a.s.a* 或 *s.a.s* 相当的定理则不成立．但在有序度量几何中，则易证后两定理仍然成立．事实上，在以上关于线段、角及三角形全合的定义下，容易证明下述定理．

定理 5 在有序度量几何中，依据上面关于全合的定义，Hi-

lbert 公理系统中的全部全合公理 HIII 都成立.

在无序度量几何中确定了一个标准点偶后，任一点偶 (AB) 有一个确定的附属数域 **K**，其中的数称为 (AB) 的距方，记成 $\overline{\overline{AB}}$. 这一距方是 **K** 中一数的平方，而该数可取 $+c$，$-c$ 两个不同的值 (设 A，B 不同). 由于 **K** 中的数无正负，因此无法分辨 $+c$，$-c$ 两值. 但在有序度量几何中，附属数域 **K** 中非 0 的数有正负之分，因而可以谈及一数的绝对值，仍以通常记号 $|\ |$ 表示. 于是对于距方 $\overline{\overline{AB}} = (+c)^2 = (-c)^2$，可取 $|+c| = |-c| = |c|$，将它定义为 A，B 两点的距离或线段 $|AB|$ 的长度，记作 $\overline{AB}$，即

$$\overline{\overline{AB}} = \overline{AB}^2.$$

因此，在有序度量几何中，以点和直线作为基本对象，关联、平行、垂直以及次序或在…之间作为基本关系. 从有关的一些公理出发，包括关联公理 HI，平行公理 HIV，无限公理，Desargues 公理 D，垂直公理 O，对称轴公理 S 以及次序公理 HII，即可引入全合与距离及长度等概念，它们具有常用几何中那些关于全合与度量的人所熟知的那些性质.

2.6 常用几何及其关属几何

在前面各节，曾经从公理出发建立了形形色色的各种几何，为此有必要对几何这一概念本身给出一个数学上的严格定义. 如果要弄清几何的意义、几何的目的、几何的本质以及几何是什么与研究什么等一类问题，势必会牵涉到哲学、历史、社会科学等数学以外的种种问题，容易陷入纷争. 就本书的目的来说，我们将局限于几何的公理化描述方式，也就是采取 Hilbert 那种形式定义的方式来定义几何学. 自然这并不是唯一的方式，更谈不上是最好或应取的方式，甚至它对当代最活跃的一些几何学分支也不能适用，例如代数几何、微分几何或拓扑学等等. 但对于以初等几何机械化问题为讨论主题的本书来说，这种以公理出发的定义方式似乎

是适宜的.

为了本书的目的,我们先作出下述定义:

定义 1 所谓一种**几何 G**,是指由三类事物 E, R, A 所构成的集体. 第一类事物 E 是由若干种**基本对象集**所构成的集合: $E=\{E_1,\cdots,E_e\}$. 第二类事物 R 是若干种基本对象间**基本关系**的集合: $R=\{R_1,\cdots,R_r\}$. 第三类事物 A 则是一些所谓**公理**的集合: $A=\{A_1,\cdots,A_a\}$, 其中每一条公理 A_i 都具有下面的形式:

(S) 设有若干个基本对象:

$$e_1\in E_{i_1},\cdots \qquad e_s\in E_{i_s}$$

并设这些基本对象间具有若干个基本关系:

$$R_v(e_{s_{1v}},\cdots,e_{s_{kv}}) \qquad v=v_1,\cdots,v_m$$

则在这些基本对象间必另有某些基本关系:

$$R_u(e_{t_{1u}},\cdots,e_{t_{lu}}) \qquad u=u_1,\cdots,u_n$$

由于基本对象 E、基本关系 R 与公理 A 的选择不同,即可有种种各别的几何 G. 对某一固定的几何 G 来说,又可以从其若干个基本对象满足某些基本关系而定义这些对象间的新的关系,称这样的关系为这些对象间的**派生关系**或**导出关系**. 同样也可定义**派生对象**或**导出对象**,**派生概念**或**导出概念**等.

试以 Desargues (平面)几何为例. 它的基本对象 E 由两个集合组成: E_1 与 E_2. E_1 中的元素称为点, E_2 中的元素称为直线. 基本关系 R 由两个元素 R_1 与 R_2 组成. 称 R_1 为关联关系, 称 R_2 为平行关系. 关系 $R_1(e_1,e_2)$ 意指 e_1 为 E_1 中的点, e_2 为 E_2 中的直线, 而点 e_1 在直线 e_2 上. 关系 $R_2(e,e')$ 意指 e, e' 是两条 E_2 中不相同的直线, 而 e, e' 相互平行. 公理集合 A 则系由 Hilbert 关联公理 HI 无限公理 D_∞ 与 Desargues 公理 D_1, D_2 以及(加强)平行公理 HIV 等所组成. 又如(无序)垂直几何,除了上面这些基本对象与基本关系外, 又多了另一种基本关系——垂直关系,公理也添入了某些所谓垂直公理. 在这种垂直几何中,对于某些满足若干关系,例如两个点 A, $B\in E_1$ 与直线 l,可以定义 A, B

对 l 对称这样的派生关系. 在这种几何中,还可以定义三角形、平行四边形、勾股形等派生对象. 其它曾经提到过的各种几何,都可以依据这种方式来给出明确的定义.

在本书开首的第一章 1.1 节,曾列举了 Hilbert《几何基础》一书中所提出关于初等(平面)几何的基本对象、基本关系及其所应满足的五类公理. 基本对象包括点与直线,基本关系包括关联、次序、全合、平行等四种,公理则分成关联公理、次序公理、全合公理、平行公理与连续公理等五类,分别记作 HI—HV. 按照上面关于几何的严格定义,这些基本对象、基本关系和公理构成了一种几何. 这种特殊的几何,在文献中通称为**欧几里得几何**. 这一名称起源于古希腊欧几里得的《几何原本》. 但这种几何也同样见之于古代其它民族. 虽然在具体课题与表达形式上大有区别,但就其实质而言,这种几何乃是古今中外所有人们日常生活与生产实践中所惯见惯用的几何学. 与其它几何学相比,例如非欧几何只通行于科学家之间,甚至仅通行于数学家中有特殊兴趣者之间. 为此本书中把这种通称为欧几里得几何的几何学改称为**常用几何**.

常用几何与前面已提到的各种几何并不是彼此无关的. 为说明彼此间的某种逻辑上的关联,先对**几何定理**这一概念作出数学上的严格定义如次.

定义 2 语句(S)(见前)中所提到的基本对象与基本关系 e_i, E_{i_k}, R_v, R_u 等属于一给定的几何 **G**,则(S)称为几何 **G** 中的一个**几何语句**或**论断**,或称语句(S)在几何 **G** 中**有意义**. 这时称诸关系 R_v 为该语句的**假设部分**,称 R_u 为该语句的**终结部分**.

定义 3 在几何 **G** 中,一个有意义的几何语句(S)如果可以依据一般的逻辑法则从 **G** 中的公理逻辑地推导出来,则称(S)是几何 **G** 中的一个**定理**,或称**定理(S)成立**. 否则称(S)不是几何 **G** 中的**定理**,或称**定理(S)不成立**.

显然每一个 **G** 中的公理都是 **G** 中的定理. 上述定义中定理一词有两种不同的用法. 这是为了遵从传统的习惯用法,当不至不引起混乱.

对于上面**语句**与**定理**的定义，不难用数理逻辑的用语与符号来精确地表达. 但为了避免叙述过份烦琐冗长将不这样做. 需要补充说明的是：这里的定义不牵涉任何**存在**问题，因而如果作出逻辑的精确表达，不会出现存在 ∃ 这样的量词，这是因为语句或定理终结部分中出现的各种基本对象的存在是在假设部分中早已规定了或已假定了的.

今可对不同的几何作出某种比较如下.

定义 4 设两种几何G与 G′，如果 G′ 中每一有意义的语句同时也是 G 中有意义的语句，而且 G′ 中的每一公理都是 G 中的定理，则称几何 G′ **关属于**几何 G，或 G′ 是 G 的一种**关属几何**，记作

$$G' \longrightarrow G$$

依据定义 4，所谓几何 G′，关属于几何 G，其意义仅在于逻辑上，即在G中依然保持 G′ 中基本对象间的基本关系，G′ 中的定理在 G 中也依然是定理. 至于基本对象与关系，公理、定理等的具体意义如何，以及是否有集合间的包含关系这一类问题，都不在考虑之列. 这些形式主义的定义与讨论方式，来自 Hilbert，对于几何定理如何证明这种逻辑问题来说，此种方式排除了与逻辑证明无关的各种外加因素，是颇为合适与有效的.

依据上述几何及相互间关属的定义，可见以前所引进的各种(平面)几何都是常用(平面)几何的关属几何. 首先，基本对象都是同样的两类：点与直线，基本关系(或派生关系)则有以下几种：

R_1 关联关系

R_2 平行关系

R_3 垂直关系

R_4 全合关系

R_5 对称关系

R_6 次序关系

在以上这些关系中，例如垂直关系与全合关系，在某些几何中是基本关系，而在另一些几何中则不然，可从其它基本关系与公理定义它们，即所谓派生关系.

在依据这些基本对象、基本关系以及某些公理所定义的（平面）几何中（平面二字在下面将略去不提），已经提到的有：

Desargues 几何

Pascal 几何

（无序）垂直几何

（无序）度量几何

有序 Pascal 几何

有序度量几何

常用几何

等等．我们也可将某些基本关系或公理添入上面的几何或作另外的组合以形成其它几何．例如我们可把次序关系与次序公理添入 Desargues 几何与垂直几何，而把如此形成的几何称为有序 Desargues 几何与有序垂直几何，等等．

上述各种几何间有着简单的关属关系，例如 Pascal 几何的每一公理不是（无序）垂直几何的公理就是该几何的一条定理（如交线 Pascal 公理，见 2.2 节）．因而 Pascal 几何关属于（无序）垂直几何．事实上，所有这些几何都关属于常用几何，参见下图．

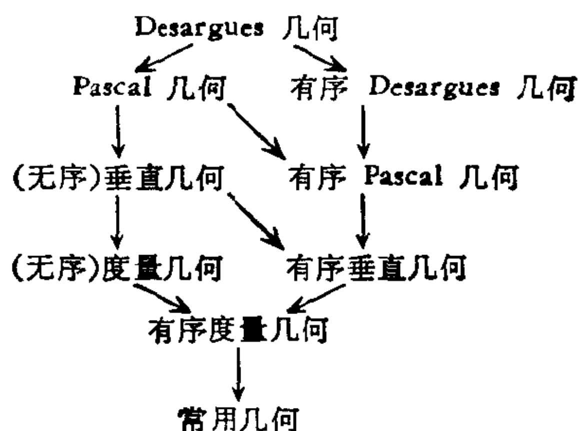


图 2.35

上述种种几何都局限于平面的情形，因而基本对象只有两种：点与直线．这种限制自然是不必要的．我们可以考虑空间的与高维的几何，其中的基本对象除点与直线外还有平面或其它高维平面（hyperplanes）等．同样也可以考虑基本对象不限于点与直线

之类关属于常用几何的那种几何．例如以直线为基本对象的直线几何（Plücker，Klein 等），以点与圆或有向矢与有向圆为基本对象，关联与正交以及相切或同向相切为基本关系的各种圆几何（Möbius，Laguerre 等），以点与球为基本对象的球几何（S. Lie 等），如此等等．对于公理系统的选择则有着更大的回旋余地．除了所谓投影几何之外，由于平行公理的修改有各种非欧几何（Lobachevsky，Bolyai，Riemann 等），由于阿基米德公理与其它公理的改动又有各种半欧几何、非 Legendre 几何等等（Dehn 等）．在不计较平行公理而作统一考虑时又有所谓自然几何、绝对几何等（Bachmann 等）．如果不加任何限制，这样的几何自然是可以随心所欲无穷无尽的．

第三章　几何定理证明的机械化与 Hilbert 机械化定理

3.1　欧几里得证明方法小议

一般说来，欧几里得《几何原本》是数学上公理化的起源，但从严密性的要求来看瑕疵甚多，这在千百年来早就为人们所认识．十九世纪中后叶对数学基础掀起了一股批判性的浪潮，人们对《几何原本》中的公理也进行了不局限于平行公理独立性问题的全面的分析．这一浪潮肇始于德国与意大利，如 Peano, Pasch, 后来由 Hilbert 集其大成．Hilbert 把欧几里得几何的公理总结成五类(见第一章1.1 节)，作为一切定理证明的依据与出发点，使欧几里得几何从此有了一个牢固的基础．尽管如此，即使有一个严密的公理系统作为一切推理论证的依据，欧几里得的定理证明方式仍然不可能达到严密无瑕的程度．这与传统的认识相反，因为对此似乎还从来没有人明确提出过，甚至可能还从来没有人认识到．本节将着重说明这一问题．

我们说欧几里得几何定理的证明方法不可能做到符合逻辑上所要求的严密程度．出现毛病的症结在于：

在欧几里得几何中，公理与定理的叙述往往隐含了一种没有明白说出的假设——所考虑的图形必须处于某种正常的一般性的、而非异常的、带有特殊性的退化情况．例如，在说到两直线平行时，就隐含着它们是不同的两条直线而不是退化为两条重合的直线．同样在说到两相交直线时，也隐含着它们并没有退化为两条平行的或重合的直线．又如在说到三角形时，总是隐含了这是一个正常的真正的三角形，它的三个顶点互不相同且不退化为顶点在同一直线上的一个“扁”三角形，如此等等．虽然我们可在定

义或定理的叙述中加上种种非退化的限制，就象我们在第一章中对平行线与三角形所做的定义，但那样叙述显得极为冗沓．究竟给出什么样的非退化的限制才算合适并不清楚．退化一词也没有确切的定义，所以等腰三角形或直角三角形算不算是一个退化的三角形，就很难预定了．

尤其严重的是，定理的证明往往只适用于某种正常的、一般的、而非异常的或退化的情形．对于退化的情形，往往需要对证明作必要的修改才能适用．或者需要改变全部证明．有时对于退化情形的定理本身甚至完全失去意义以至根本不成立．下面举例说明．

［例 1］**定理** 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 互相平分（见第一章 1.2 节）．

这一叙述隐含了这样一些一般位置的假设，即 $ABCD$ 是一真正的四边形，A, B, C, D 互不相同，且平行的对边 AB, CD 位于两条不相重合的平行线上，AD, BC 亦然，等等（第一章 1.2 节作平行四边形定义时，已有意把这些退化情形排除在外）．

对于某些退化的情形，例如若 A, B, C, D 完全重合，对定理叙述作适当解释仍可视为成立．若 A, B, C, D 互不相同，且退化到位于同一直线上，则定理的假设虽然仍可作适当解释而使之有意义（例如 AB 与 CD 重合看作 $AB /\!/ CD$ 的退化情形），但终结部份则将失去意义．如果把互相平分解释为点偶(AC)，(BD)有共同的中点，则定理显然不能成立．若 A, B 互不相同但 C 退化到与 A 重合，而 D 退化到与 B 重合，则不论作如何解释，定理都不成立．





［例 2］**Desargues 公理**（或定理）$\mathbf{D}_1$ 设

$$\triangle ABC \text{ 与 } \triangle A'B'C'$$

的三组对应边互相平行，即

$$AB /\!/ A'B' \qquad AC /\!/ A'C' \qquad BC /\!/ B'C'$$

则三组对应顶点的连线 AA', BB', CC' 或互相平行或相交于一点.

在定理的叙述中,三角形应理解为正常的真正的三角形,平行线也应理解为非退化为重合直线的真正的平行线. 见第一章 1.1 节和 1.2 节关于平行线与三角形的定义.

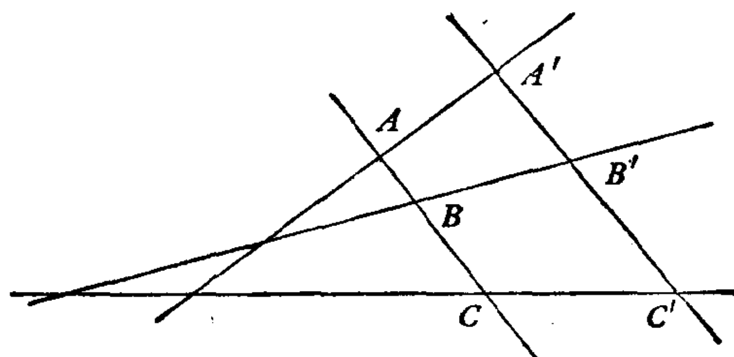


图 3.1

对于退化的情形,例如 $\triangle ABC$ 退化为 A, B, C 三点虽不相同但位于一直线上,而 $A'B'$ 仍与 AB 平行但不退化为重合直线的情形. 此时 A', B', C' 也将在一直线上,而定理显然不能成立. 见图 3.1. 至于其它种种退化情形,定理是否失去意义以及是否成立,需作复杂的细致分析才能确定.

[例 3] **Desargues 公理(或定理) D_2** 设 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 有两组对应边互相平行,

$$AB /\!/ A'B' \qquad AC /\!/ A'C'$$

又三组对应顶点的连线 AA', BB', CC' 互相平行或相交于一点,则这两个三角形的第三组对应边也互相平行.

显然,对于例 2 中那种退化的情形,即 A, B, C 退化为一直线时,仍可视定理(不足道地)成立. 但若平行线 $AB /\!/ A'B'$ 退化为 AB 与 $A'B'$ 重合时,定理即不再成立. 见图 3.2.

上面的例子说明,每个公理或定理往往都有一些隐含而不明白说出的一般性非退化的假设限制. 如果超越这些限制,定理可能会失去意义甚至不成立. 因此在每一个定理的证明过程中,每一次添设补助线或应用已知的公理或定理时,都需细致检查所应

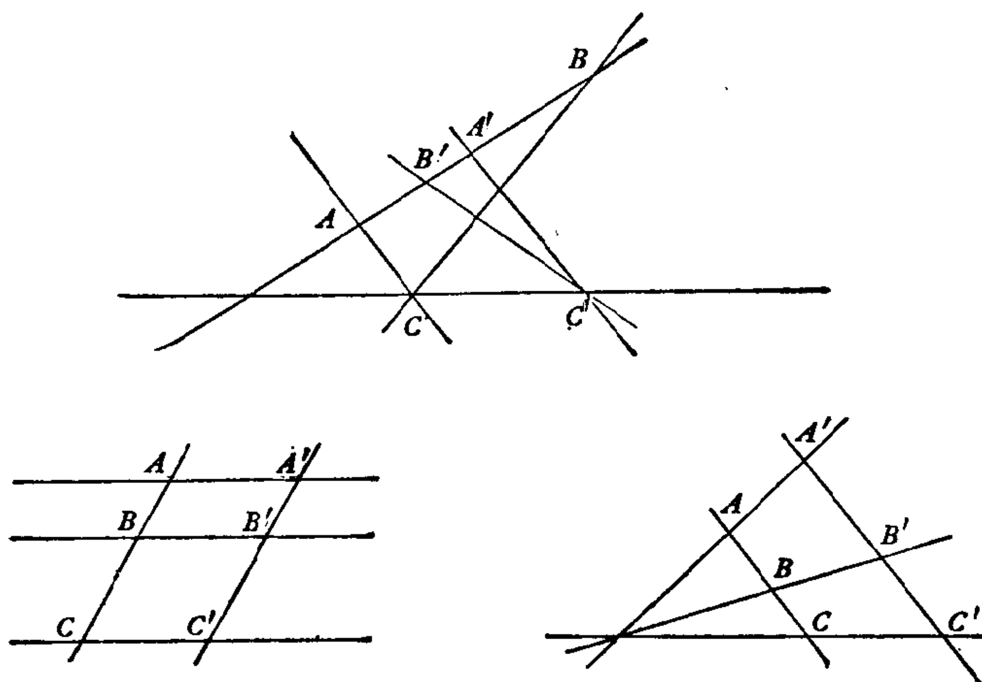


图 3.2

用的定理是否在它成立的一般性条件限制之内，并需就各种可能出现的退化情形逐一分别讨论. 作为具体的例子可见第二章 2.2 节中 Hessenberg 定理的证明. 这样做自然使定理的证明显得冗长烦琐，但为了达到应有严密性的要求，这种烦琐的考虑是不能缺少的，我们在第一章的许多证明中都曾反复使用平行四边形对角线互相平分这一定理以及两个 Desargues 公理. 象前面例 1—3 所示，这些定理或公理对于退化的情形可能无意义或不成立，因此每次应用都须小心以至不出现这种退化情况. 我们在第一章中曾为许多证明耗费不少笔墨，其原因即在于此.

在证明定理时，即使一开始作为出发点的假设中的图形处于某种一般而非退化的位置，但在论证过程中我们仍无法预知在应用其它已知定理时就不出现退化的情形. 不仅应用定理时每次检查既烦琐又困难，而且要保证在论证过程中不至出现引起失效或错误的退化情形实际上也是不可能的. 同样我们也没有一种有效的办法用于指出需要证明的定理本身的叙述应限制在什么样的非退化情形下才能保证定理的成立. 这些问题使得欧几里得证明定理的方式在实际上不可能达到应有的严密性的要求. 因此，即使

有严密的公理系统作为一切论证的依据，欧几里得证明几何定理的方式在实际上仍不可能做到从逻辑上说来严密无间.

为了使几何证明严密无间，必须采取与欧几里得传统证法不同的方式.

与欧几里得的传统证法相反，我们所提出**几何机械化证明**的方式，不仅可以节省脑力劳动，而且可以真正合于严密性的要求.

3.2 几何概念坐标表示的标准化

依据上节的分析，几何论证的种种有失严密的问题，主要是由于退化情形而引起的. 传统上欧几里得的几何论证方式是无法应付这种局面的. 但 Descartes 以至 Hilbert 从公理系统出发引进数系统并建立坐标系使几何代数化后，即可有效地处理退化情形而达到真正严密的要求.

首先，"退化"一词是相对"一般"来说的. 这里"一般"一词相当于英语中的"general"，但它是一种专门术语，而非普通名词. 由于容易与通常用语相混，英语创造了"generic"一词，有时被译成"普适"，但这似乎并不完全恰当. 在没有更合适的译名的情形下，我们有时借用 generic.

Generic 一词有着严格的定义，通常见于代数几何，例如 generic 点，generic 平面等. 根据我们的需要，将不采用代数几何中的严格定义而象下面那样来理解.

一个 **generic 点**指点的某几个坐标是参数或不定量，**generic 位置**指图形中的点的坐标中有一些是参数或不定量. 所谓**退化**，意指这些参数或不定量将取特定的值，致使某些坐标间的某些代数式为 0.

欧几里得几何论证中的定理，往往隐含了图形处于 generic 位置的假设. 要得到严格的证明，既须证明在 generic 情形下定理成立，又须明确指出使定理依然成立的退化与非退化范围. 前者可通过坐标中的参数来表达，后者可用坐标间某些多项式不等于

0，即非退化的方式来表达.

第一章 1.7 节以及第二章中对一些基本的几何关系使用坐标间数量关系表达时，附加了许多限制，使表达形式烦琐. 为了明确 generic 与退化范围，第一步将把一些基本几何关系的定义稍加修改，使相应的坐标间的数量关系既能概括 generic 与退化的情形，又能使退化情形易于从 generic 情形中区别出来. 下面试就这些基本的几何关系分别论述如次.

1. 平行关系.

设四点 A_i 在某一坐标系下的坐标为 (x_i, y_i)，$i = 1, 2, 3, 4$. 命

$$\alpha = (x_2 - x_1)(y_4 - y_3) - (y_2 - y_1)(x_4 - x_3)$$

定义 1 如果

$$\alpha = 0$$

则称 A_1A_2 与 A_3A_4 **平行**，记作

$$A_1A_2 /\!/ A_3A_4$$

在 $A_1, \cdots, A_4$ 彼此互不相同且 A_1A_2 与 A_3A_4 是两不同直线时，这里的平行概念与第一章中描述的相合；但这里的定义也包括了退化情形，而第一章中则否. 为了有所区别，我们将改称以前所定义的平行为真平行或几何平行，而把简单的平行一词规定为指 $\alpha = 0$. 这包括了真平行，也包括了 A_1 与 A_2 重合，或 A_3 与 A_4 重合，或虽然 A_1 与 A_2 不同，A_3 与 A_4 不同，但直线 A_1A_2 与 A_3A_4 重合等多种退化情形. 这些退化情形可通过一些等式关系表示，而非退化情形则通过一些不等于 0 的关系表示. 例如 $A_1 = A_2$ 指 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$，而 $A_1 \neq A_2$ 指 $x_1 \neq x_2$ 或 $y_1 \neq y_2$，等等.

2. 共线关系.

设三点 A_i 在某一坐标系下的坐标为 (x_i, y_i)，$i=1, 2, 3$. 置

$$\beta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)+(x_1y_2-x_2y_1)$$

定义 2 若 $\beta=0$,则称三点 A_1, A_2, A_3 **在一直线上**或**三点共线**,或 A_3 **在** A_1A_2 **上**,A_1 **在** A_2A_3 **上**,A_2 **在** A_1A_3 **上**.

在 A_1, A_2, A_3 三点彼此都不相同时,这里的定义与以前的定义相合. 但新定义也概括了三点中某些点重合的退化情形. 为了与以前三点互不相同时的定义有所区别,将称以前所定义的共线为真共线或几何共线. 因而在以后称三点 A_1, A_2, A_3 共线时,意指三点互不相同而真共线,或指其中有两点重合,或三点都重合.

3. 垂直关系.

设四点 A_i 在一垂直坐标系下的坐标各为 (x_i, y_i), $i=1,2,3,4$.

定义 3 若垂直坐标系的垂率为 k,则称 A_1A_2 与 A_3A_4 **垂直**,记作

$$A_1A_2\perp A_3A_4$$

如果

$$k(y_2-y_1)(y_4-y_3)+(x_2-x_1)(x_4-x_3)=0$$

特别在 Descartes 坐标系下,上式中 k 取作 1.

显然对于 A_1 与 A_2 不同且 A_3 与 A_4 不同的情形,新定义与以前关于两直线垂直的定义相合. 但新定义也概括了 A_1 与 A_2 重合或 A_3 与 A_4 重合的这种退化情形. 为了与前有所区别,将改称以前所定义的垂直为真垂直或几何垂直.

4. 次序关系.

对于任意一种有序几何(见第二章 2.6 节),可以任取一坐标系,并定义次序关系如下.

定义 4 设三点 $A_i=(x_i, y_i)$, $i=1,2,3$ 在同一直线上,则称点 A_2 **在** A_1 与 A_3 **之间**,如果以下几种情形至少有一种成立:

(1) $x_1<x_2<x_3$

(2) $x_1>x_2>x_3$

(3) $y_1<y_2<y_3$

(4) $y_1>y_2>y_3$

这一定义已排除了 A_i 中有点重合的那种退化情形.

定义 5 设直线

$$L: u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$$

其中 (x_1, x_2) 为动点坐标，u_1, u_2 不同时为 0. 则两点 $A = (a_1, a_2)$ 与 $B = (b_1, b_2)$ 都不在 L 上时，将视 $u_1a_1 + u_2a_2 + u_3$ 与 $u_1b_1 + u_2b_2 + u_3$ 为同号或异号，而称 A 与 B 在 L 的**同侧**或**异侧**.

5. 度量性质.

在(无序)度量几何中，曾经引进过点偶距方的概念，在有序度量几何中，更有距离或长度的概念，今重述其标准化后的定义如下:

定义 6 在度量几何中取一 Descartes 坐标系，则对于任意两点$A = (a_1, a_2)$ 与 $B = (b_1, b_2)$，数

$$\overline{\overline{AB}} = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

称为点偶 (AB) 或 (BA) 的**距方**. 如果度量几何是有序的，则恰有一数 $c \geqslant 0$，使

$$c^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_1 - a_1)^2$$

记作 $\overline{AB}$ 并称为 A, B 两点的**距离**或**线段** $|AB|$ 的**长度**:

$$\overline{AB}^2 = \overline{\overline{AB}}, \quad \overline{AB} \geqslant 0.$$

角的概念及其度量要比点偶或线段的概念与度量复杂得多，而且带有模棱两可性（在没有连续概念与有关公理的帮助之下）. 由于它可以通过某些线段的函数来量度，而且由于两三角形三边相等即全合，因而三角相等这一定理，角的大小可以通过线段的长短来间接处理，在几何定理的证明过程中可以避免直接使用角的量度，故这里不再另作定义.

6. 对称与反射.

在垂直几何中，我们曾定义过对一非迷向线的对称与反射. 见第二章 2.3 节，现重述如下:

定义 7 设垂直几何中一垂直坐标系，其垂率为 k. 又设直线

$$L_u: u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$$

非迷向线,即

$$ku_1^2 + u_2^2 \neq 0$$

则定义一点 $A=(a_1, a_2)$ 对 L_u 的**对称点**为点 $A^*=(a_1^*, a_2^*)$,这里

$$(ku_1^2+u_2^2)a_1^* = -(ku_1^2-u_2^2)a_1 - 2ku_1u_2a_2 - 2ku_1u_3$$

$$(ku_1^2+u_2^2)a_2^* = -2u_1u_2a_1 + (ku_1^2-u_2^2)a_2 - 2u_2u_3$$

又定义过 $A=(a_1, a_2)$ 的一直线

$$L_v:\ v_1(x_1-a_1)+v_2(x_2-a_2)=0$$

对 L_u 的**对称直线**为过 A^* 的直线

$$L_v^*: v_1^*(x_1-a_1^*)+v_2^*(x_2-a_2^*)=0$$

这里

$$v_1^* = (ku_1^2-u_2^2)v_1 + 2u_1u_2v_2$$

$$v_2^* = 2ku_1u_2v_1 - (ku_1^2-u_2^2)v_2$$

又 A^*, L_v^* 也称为 A 与 L_v 对直线 L_u 的**反射**.

7. 分角线.

在无序垂直几何或无序度量几何中,只有全角的概念而不能定义角的概念. 对于一个全角的分角线,在无序垂直几何中可以恰有两条或根本没有,仅在无序度量几何中才能保证恰有两条但这两条无法加以区别. 今作分角线的标准化定义如次.

定义 8 设一垂直坐标系的垂率为 k,对于任意三点 $A_i=(a_i, b_i)$, $i=0, 1, 2$, 下面的方程称为角 $\measuredangle A_0(A_0A_1, A_0A_2)$ 或

$$\measuredangle A_1A_0A_2$$

的**分角线**:

$$\begin{aligned}&[(b_1-b_0)(x-a_0)-(a_1-a_0)(y-b_0)]\\&\quad\cdot[(a_2-a_0)(x-a_0)+k(b_2-b_0)(y-b_0)]\\&=[(a_2-a_0)(y-b_0)-(b_2-b_0)(x-a_0)]\\&\quad\cdot[(a_1-a_0)(x-a_0)+k(b_1-b_0)(y-b_0)]\end{aligned}$$

对于 A_1, A_2 都不同于 A_0 的这种非退化情形,可见这一方程确定了两条直线而与通常的分角线概念相符. 如果几何是有序的,则可进一步依据上述的 4 把这两条分角线区分为内分角线与

外分角线.

8. 派生概念与派生关系.

在上述 1 至 7 出现的关系中,既有基本关系,如平行、垂直,也有派生关系,如对称、全合,我们也可考虑其它种种派生的概念与关系,例如斜率、面积、中点、圆、半径、圆的(内,外)相切、圆的正交,以至曲线的切线与奇点等. 这些派生的概念与关系可随需要而添入,不再列举. 需要指出的是以下几点:

(1) 通过(从属于几何的)坐标系引进标准化的定义时,对于非退化的情形必须与原来的几何意义相符. 至于退化情形的定义虽可任意,但一经规定即不容变更.

(2) 定义不应随(从属于几何的)坐标的选取而变更,即定义中出现的代数式(或关系)应是从属于几何的坐标变换下的不变式(关系)或协变式(关系).

要详细讨论(2)将远远超出本书的范围,而且从这一角度看,相应的不变式理论还远没有发展到一个成熟的程度. 但这里列举的那些代数式(关系)的不变性则是显然的.

3.3 定理证明的机械化与 Hilbert 关于 Pascal 几何中交点定理的机械化定理

Descartes 曾经指出,欧几里得几何中的每一证明,总是要求某种新的,往往是奇巧的想法. 与之相反,Descartes 提出了把推理程序机械化因而减小解题工作量的设想(参阅 M. Kline, [1], 第 15 章). 依据这一设想,对于几何中某一类的定理,不论其具体的叙述如何,都可适用某通用的证法,这种证法将遵循着一定的机械化了的推理程序来进行,并保证在有限步骤之后,可以肯定定理成立或否定定理成立. 而且,证明定理在一般情况下成立时,还在机械证明过程中机械地给出一切有可能使定理失效或不成立的退化条件来. 这样一种适用于某类定理的通用机械证法称为一种**机械化证法**. 对于某类定理有机械化证法的论断,本身就是一条定

理，称为一条**机械化定理**.

在第一章中，我们大体上依据 Hilbert《几何基础》一书所给出的范式，从某些公理出发，引进数系统，建立坐标系，遵循了一条可以称之为从公理化走向代数化以至坐标化的道路. 在这一道路上，必须证明许多定理，这些定理的证明都依照欧几里得的方式，个别的定理通过个别的方法得出了个别的证明. 这种证明的方式，在 3.1 节中已指出，实际上不可能达到所应有的严密程度. 而且，也如前面已为 Descartes 所指出过的那样，每一证明总要求某种新的往往是奇巧的想法，因而尽管由于这些奇巧想法往往引人入胜，使这种方法产生巨大的吸引力，但从效率与发展前景来说，总是有极大局限性的. 这也许正是 Descartes 提出机械化证明设想的重要理由之一，至少是本书提出机械化证明的原因所在. 由于现代电子计算机的出现，已经使得这种机械化证明的设想脱离了空想阶段而具有了现实可行性. 本章将给出这种机械化证明设想的理论依据，而在以后各章将给出一些用手算与在计算机上实践的具体实例. 著者将在有关的书籍中给出更多的实例，以说明这种方法的实际效果.

象本章第 1 节所指出的那样，几何定理，往往只在有条件的情形下，即所谓非退化条件下才成立，而这些非退化条件又往往并不在定理的假设部份明确表达，事实上也不容易在一开始就明确应在怎样的非退化条件下才能使定理成立.为此我们将对定理、证明、机械化证明以及机械化定理等这些概念再作专门的明确定义如下.

定义 1 如果在几何**G**中一个有意义的几何语句 (S)，在附加了若干个几何中有意义的条件作为**附加假设**后能够成立，则称这个语句 (S) 是一个**有条件的定理**，或**定理 (S) generically 成立**，附加的条件则称为使定理成立的**非退化条件**.

定义 2 对于一个 **generically** 成立的定理(S)，如果有一过程从 (S) 的假设部份出发，依据几何**G**中的公理与逻辑推理法则逐步进行，在进行过程中逐次添入若干**附加条件**，最后到达 (S) 的

终结部份，则这一过程称为这一有条件定理的一个**证明**.

定义 3 如果对于几何 **G** 中某一类给定的有意义几何语句 **S**，有一个机械的法则，使得对于这类语句中的任意一个语句，从假设部份出发，在逐步进行逻辑推证时，其每一步都可依据这一法则机械地给出确定的下一步骤，或给出应添入的附加条件，最后在有限步后必然得出语句的终结部份或其反面，则称这一类定理 **S 有机械化证法**，或称这一类定理的证明可以**机械化**，而以这一机械法则为这一类定理的一个**机械化证法**.

定义 4 如果上述定义中的 **S** 包括了几何 **G** 中所有可能有意义的几何语句，则称几何 **G** 的定理证明可以**机械化**，或简称 **G** 可**以机械化**.

所谓"几何 **G** 的定理证明可以机械化"以及" **G** 中某一类定理证明可以机械化"这样一些断言，本身就是一个需要证明的定理，其证明需要一个定义中所要求的一个机械的法则. 这一类的定理将通称为一条**机械化定理**.

上面几个定义中的**附加假设**与**附加条件**自然不能是任意的. 例如原来假设部份中某一假设的反面，就显然不能作为附加条件来加入. 这里所说的附加条件，必须是这样的一种条件，即如果我们选定坐标系并依据 3.2 节将原来的几何假设用坐标间的(多项式)等式或不等式关系来表示后，所添加的条件应使这些坐标间增加一个非不足道的(多项式)等式关系. 换言之，如果把坐标变量按一定次序排列后看成某向量空间中的一个点，诸假设(多项式)等式(或不等式关系)将在这一向量空间中确定一个点集 V，通称为**代数簇**(或**代数集**，如果有不等式关系时)，则所添加条件的相应(多项式)等式关系应确定一个 V 的真子集. 应用代数几何的术语，不难给出严格的定义来. 对此可参阅本书的第四章.

在数理逻辑中，一个与可机械化类似的述语是**可判定的** (decidable)，正象数理逻辑中已证明许多数学问题和领域往往是不可判定的那样，我们有下面的推测:

推测 Desargues 几何是不可能机械化的，即不可能找到一个

机械化证法.

几何的推理论证希望的是能够真正发现并证明一些正面成立的定理,而不是希望得出定理不能成立或不能证明的反面结论来.客观事实说明我们的希望并非奢望而是合情合理的要求，并能圆满地得到满足. 本书将证明只需在 Desargues 几何中添上交线 Pascal 公理以至几何附属数域成为可交换的，则在数学研究中通常遇到的那些几何,如第二章以及后面第六章所提到的那些,就都是可以机械化的了. 那些据推测不可能机械化的几何也许仅由于一些人为的不切实际的限制所造成. 本章将举出一个定理证明可以机械化的最简单的例子来. 这一例子来源于 Hilbert，因而称之为 **Hilbert 机械化定理.**

虽然 Hilbert 一书的主要内容在于奠定几何的严格基础与阐明一些重要的几何公理与几何事实间的逻辑关系，但是该书的绝大部分篇幅都花在阐明如何从公理化走向代数化，而这恰好为几何定理证明的机械化铺平了道路. 虽然 Hilbert 并不是依据机械化的思想来表达他的机械化定理的，甚至 Hilbert 本人是否自觉地或有意识地认识到这一点也很难说，但事实上最早的机械化定理似乎就见于 Hilbert《几何基础》一书.

这里所说的 Hilbert 机械化定理,出现于《几何基础》一书的第六章之末. 在该书的第一版中，这一结果只用斜体字表出而未列作定理. 在后来的几版中，则正式写成定理 62. 现将该定理的叙述照录如下:

“**定理 62** 设一种平面几何,其中公理 I1—3，II，IV* 都满足,而且 Pascal 定理正确,这几何中每一条纯粹的交点定理，可以通过作适当的辅助点和辅助直线，表为有限个 Pascal 构形的组合.”

今先对定理中出现的名词依据 Hilbert 原书的解释逐一说明如下.

所谓“公理 I1—3” 即指 Hilbert 公理系统中平面上的第 I 类关联公理，“II”指第 II 类次序公理，“IV*” 指狭义的第 IV 类平行

公理，也就是本书第一章 1.1 节中的公理 HI，HII 和(加强)平行公理 HIV.

所谓 "Pascal 定理"，实质上即是第二章 2.1 节中的交线 Pascal 公理. 所谓 "Pascal 构形"，则指相当于 Pascal 定理内容的一个图形，包括两条相交直线 l，l'，在 l 上的三个点 A，B，C，在 l' 上的三个点 A'，B'，C'，而 $AB' /\!/ A'B$，$BC' /\!/ B'C$.

所谓"纯粹的交点定理"，是指"具有下述性质的定理：只含有关于点和直线的位置关联以及关于直线的平行性的叙述，而同时不用其它关系(例如全合和垂直)."

Hilbert 原书接着对这种定理作了一个更详细的说明如下：

"平面几何的每一条这种纯粹的交点定理都可以描述为下面的形式：

首先任意取一组有限个点和直线，然后按照预定的方式作这些直线中的某些任意平行线. 在这些直线中的某些条直线上取任意点，而且通过这些点中的某些点作任意直线；在按照预定的方式作了连线、交点以及通过已经存在的点的平行线之后，终于得到一组有限条直线，它们就是定理所断言的、通过同一个点或互相平行的直线."

下节中，我们将举例说明这里对于交点定理的两种说法其实并不完全一致. 因此，为了区别，我们将称后一种较特殊的交点定理为 Hilbert 型或构造型交点定理，而对前一种较一般的交点定理，则仍简称为交点定理.

在 Hilbert 原书中的定理 62 以下，Hilbert 还作了一个补充说明：

"于是，若是用 Pascal 定理，交点定理的证明就不需要再求助于全合公理和连续公理."

这说明，Hilbert 对定理 62 同对全书的精神相同，着眼于公理与定理之间的逻辑依存关系. 但从定理 62 之前相当于定理证明的一段说明来看，则 Hilbert 在实质上已给出了至少是 Hilbert 型交点定理的一种机械化证法.

在前一章中，我们已指出如何用一条无限公理以及 Desargues 公理来部份地代替 Hilbert 公理系统中的次序公理与连续公理，并称一种满足(平面)关联公理 HI，(加强)平行公理 HIV，无限公理 D_∞ 以及交线 Pascal 公理 P 的几何为(平面) Pascal 几何．于是依据 Hilbert 所提供的关于定理 62 的证明的思想，可把该定理转述成下面的形式．

Hilbert 机械化定理 Pascal 几何中的 Hilbert 型交点定理有机械化证法，且在这种证法的过程中将有可能使定理不成立的退化条件机械地逐一给出．

下一节中，我们将依据 Hilbert 的方法给出若干交点定理的机械化证明． 至于这一机械化定理本身的证明，则将在本章 3.5 节给出．

3.4 Hilbert 机械化证法举例

在给出 Hilbert 机械化定理的证明之前，本节将举例说明 Hilbert 所用的机械化证法，并指出 Hilbert 型交点定理与一般的交点定理不完全一致．

[例 1] **定理** Generic 平行四边形的对角线互相平分．

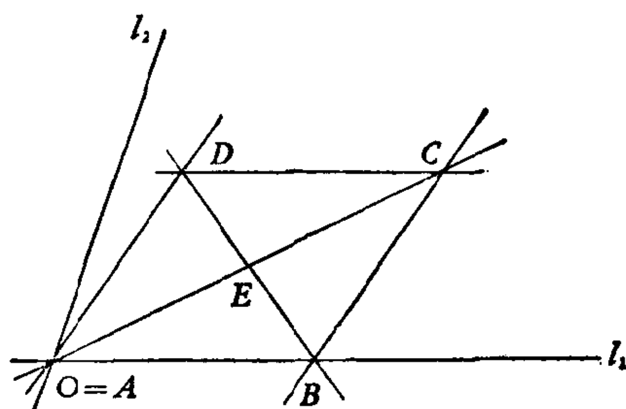


图 3.3

设 generic 平行四边形 $\square ABCD$，如图 3.3．对角线 AC 和 BD 的交点为 E．选取坐标系，以 A 为原点 O，B 在第一轴 l_1 上，

而第二轴任意. 这种选择并无必要性，也不影响对机械化证法的说明，只是为了使计算简化，避免不必要的繁复而已.

为了表示 ▱$ABCD$ 是 generic 的，B 的坐标可取为$(u_1, 0)$，D 的坐标取为 (u_2, u_3)，其中 u_1, u_2, u_3 都视为参数. 这时 C，E 已不再是 generic 的，而需受假设中几何条件的约束. 记它们的坐标各为 $C=(x_1, x_2)$ 与 $E=(x_3, x_4)$，诸 x_i 依据几何条件满足下面的代数关系式:

$$BC /\!/ AD \Longleftrightarrow u_3(x_1-u_1)-u_2x_2=0 \tag{1}$$

$$CD /\!/ AB \Longleftrightarrow u_1(x_2-u_3)=0 \tag{2}$$

$$E\text{在 } AC \text{ 上} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_3 & x_4 & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow x_2x_3-x_1x_4=0 \tag{3}$$

$$E\text{在 } BD \text{ 上} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_3 & x_4 & 1 \\ u_2 & u_3 & 1 \\ u_1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Longleftrightarrow u_3x_3+(u_1-u_2)x_4-u_1u_3=0 \tag{4}$$

以上(1)—(4)四式构成了定理的假设部份. 定理的终结部分则为

$$E\text{是}(AC)\text{中点} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_3-x_1=0 & (5) \\ 2x_4-x_2=0 & (6) \end{cases}$$

$$E\text{是}(BD)\text{中点} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_3-(u_1+u_2)=0 & (7) \\ 2x_4-u_3=0 & (8) \end{cases}$$

定理的证明在于从假设(1)—(4)推出终结(5)—(8). 定理的机械化证明则在于设计一种机械的方法，依据它所提供的确定步骤机械地进行，并在有限步后断定 (5)—(7) 是否可从(1)—(4)得出，并在这一过程中，给出足以使定理失效或不成立的一切可能的非退化条件.

这一机械的方法是先将诸 x 依一定次序排列，例如 x_1，x_2，x_3，x_4 的次序，再从(1)—(4)作必要的消去以依上述次序逐个地解出这些 x，并给出这一过程中所出现的非退化条件. 最后将这些 x

代入(5)—(8)以验证其是否满足.

为此先从(1),(2)解出 x_1, x_2 得

$$x_1 = u_1 + u_2 \tag{9}$$

$$x_2 = u_3 \tag{10}$$

相应的非退化条件为

$$u_1u_3 \neq 0 \tag{11}$$

以所得 x_1, x_2 代入(3),得

$$u_3x_3 - (u_1 + u_2)x_4 = 0 \tag{12}$$

从(12)与(4)解出 x_3, x_4 得

$$x_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \tag{13}$$

$$x_4 = \frac{1}{2}u_3 \tag{14}$$

相应的非退化条件仍为(11),或即

$$u_1 \neq 0 \tag{15}$$

$$u_3 \neq 0 \tag{16}$$

诸非退化条件的几何意义容易说明:

$$u_1 \neq 0 \Longleftrightarrow B \text{与} A \text{不重合}$$

$$u_3 \neq 0 \Longleftrightarrow D \text{不在} AB \text{直线上}$$

今将终结部份(5)—(8)诸式的左边各记为 $g_1, \cdots, g_4$. 将从(9),(10),(13),(14)诸式所得的诸 x 代入诸 g, 经计算直接验证 $g_i = 0$. 换言之,在非退化条件(15),(16)满足的假定下,定理成立,而且上面的计算过程同时给出了定理的证明.

至此已可得到下面的结论:

只需 $\square ABCD$ 的顶点 B, A 不相重合, 且顶点D不在直线AB上,对角线即互相平分.

如果需要,我们也可对这两个非退化情形逐一进行检查,或可对每一种退化情形作为新的定理如前逐一证明其成立与否[1). 这

1) 例如投影几何中圆锥曲线内接六角形的 Pascal 定理. 当六角形的若干个顶点退化为重合的顶点时,相应的退化情形可以作为另外的定理来证明.

里将不再详述.

这一例子虽然是极为简单的，却又是很典型的. 这里所用的机械的证明过程适用于比这复杂得多的定理，只是计算量将大为增加. 因此不能不使用电子计算机这一类现代化工具. 下面将再举一些较为复杂的定理来说明这一点.

[例 2] **Desargues 定理** 设两 generic 位置的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的三组对应边都互相平行，且 AA', BB' 都过 O 点，则 CC' 也经过 O 点. 如图 3.4.

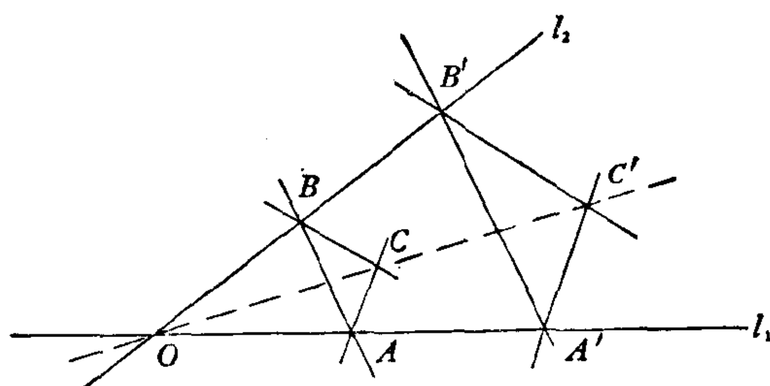


图 3.4

我们将证明这一定理，并明确 generic 的限制条件. 这一定理本已作为公理引入以建立 Desargues 数系与坐标系. 这里重新证明只是作为机械化方法的一个说明，不牵涉循环论证的问题.

为此将假定 AA', BB' 两直线并不重合，并为计算简单起见，将这两直线取作坐标轴 l_1 与 l_2，O 为原点. 命各点的坐标依次为

$$A=(u_1,0) \qquad A'=(u_2,0)$$
$$B=(0,u_3) \qquad C=(u_4,u_5)$$
$$B'=(0,x_1) \qquad C'=(x_2,x_3)$$

其中 $u_1,\cdots,u_5$ 作为参数，而 x_1, x_2, x_3 则受几何条件的制约.

定理的假设部份由以下诸几何条件相应的代数关系式来表达:

$$A'B'/\!/AB \Longleftrightarrow u_1x_1-u_2u_3=0 \qquad (17)$$

$$A'C'/\!/AC \Longleftrightarrow (u_4-u_1)x_3-u_5(x_2-u_2)=0 \qquad (18)$$

$$B'C' /\!/ BC \Longleftrightarrow u_4(x_3 - x_1) - (u_5 - u_3)x_2 = 0 \tag{19}$$

定理的终结部份则为

$$O \text{在} CC' \text{上} \Longleftrightarrow u_4x_3 - u_5x_2 = 0 \tag{20}$$

从(17)得

$$x_1 = \frac{u_2u_3}{u_1} \tag{21}$$

引入的非退化条件为

$$u_1 \neq 0 \tag{22}$$

以(21)式的 x_1 代入(19)并从(18),(19)解出 x_2, x_3, 得

$$x_2 = \frac{u_2u_4}{u_1} \tag{23}$$

$$x_3 = \frac{u_2u_5}{u_1} \tag{24}$$

非退化条件则为(18),(19)的系数行列式不等于 0 ,或即

$$u_1u_3 - u_1u_5 - u_3u_4 \neq 0 \tag{25}$$

记终结部份(20)的左边为 g. 以 (21)(23),(24) 中的诸 x 代入 g, 化简得 $g = 0$. 由此知定理在上述非退化条件(22)与(25)满足时成立.

非退化条件的几何意义各为

$$u_1 \neq 0 \Longleftrightarrow A \text{不与} O \text{重合}$$

$u_1u_3 - u_1u_5 - u_3u_4 \neq 0 \Longleftrightarrow A, B, C$ 不在一直线上,故得结论:

在 AA' 不与 BB' 重合而交于一点 O, 且 A 不与 O 重合, 又 A, B, C 不共线的这种 generic 或非退化条件下,定理成立.

对于在各退化情形下定理是否依然成立, 若需要可逐一另行检查. 例如对 A, B, C 共线,即

$$u_1u_3 - u_1u_5 - u_3u_4 = 0$$

的退化情形, u_4, u_5 已不能同时为参数. 此时不妨将 u_5 改为 x_0, 于是几何假设为

$$-u_1x_0 - u_3u_4 + u_1u_3 = 0$$

$$u_1x_1 - u_2u_3 = 0$$
$$(u_4 - u_1)x_3 - x_0(x_2 - u_2) = 0$$
$$u_4(x_3 - x_1) - (x_0 - u_3)x_2 = 0$$

由此得

$$x_0 = \frac{u_3(u_1 - u_4)}{u_1}$$
$$x_1 = \frac{u_2u_3}{u_1}$$
$$x_2 = \text{任意}$$
$$x_3 = -\frac{u_3}{u_1}(x_2 - u_2)$$

引入的非退化条件为

$$u_1 \neq 0 \Longleftrightarrow A\text{ 不与 }O\text{ 重合}$$
$$u_1 - u_4 \neq 0 \Longleftrightarrow AC\text{ 不与 }BB'\text{ 平行}$$

以所得诸 x 代入需求证之式，得

$$g = u_4x_3 - x_0x_2 = -u_4 \cdot \frac{u_3}{u_1}(x_2 - u_2) - \frac{u_3(u_1 - u_4)}{u_1} \cdot x_2$$
$$= -\frac{u_3}{u_1} \cdot (u_1x_2 - u_2u_4) \neq 0$$

故此时除非另加退化条件，如 $u_1 = 0$ 或 $u_1 - u_4 = 0$，定理将不再成立，这可与 3.1 节的例 3 对照.

[例 3] **Desargues 定理** 设两个在 generic 位置的三角形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的顶点连线 AA'，BB'，CC' 都经过同一点 O，又两组对应边互相平行，即 $AB /\!/ A'B'$，$AC /\!/ A'C'$，则第三组对应边也互相平行：$BC /\!/ B'C'$.

与例 2 相同，仍设 AA'，BB' 为两不同直线，并取之为坐标轴，O 为原点，各点坐标也与前相同. 则假设将为

$$A'B' /\!/ AB \Longleftrightarrow u_1x_1 - u_2u_3 = 0$$
$$A'C' /\!/ AC \Longleftrightarrow (u_4 - u_1)x_3 - u_5(x_2 - u_2) = 0$$
$$CC'\text{ 过 }O\text{ 点} \Longleftrightarrow u_4x_3 - u_5x_2 = 0$$

终结为

$$B'C' /\!/ BC \Longleftrightarrow g \equiv u_4(x_3 - x_1) - (u_5 - u_3)x_2 = 0$$

解出假设部份得

$$x_1 = \frac{u_2u_3}{u_1} \qquad x_2 = \frac{u_2u_4}{u_1} \qquad x_3 = \frac{u_2u_5}{u_1}$$

非退化条件为

$$u_1 \neq 0 \Longleftrightarrow A \text{ 不与 } O \text{ 重合}$$

$$u_5 \neq 0 \Longleftrightarrow C \text{ 不在 } AA' \text{ 上}$$

将诸 x_i 代入 g 得

$$g = u_4 \cdot \left(\frac{u_2u_5}{u_1} - \frac{u_2u_3}{u_1}\right) - (u_5 - u_3) \cdot \frac{u_2u_4}{u_1} = 0$$

故定理在上述非退化条件下成立。

如果作进一步检查，可知在 $u_5 = 0$ 也即 C 在 AA' 上的情形下，若不再另加退化条件，定理即不成立．这可与 3.1 节的例 2 相对照．

根据以上三例，可见这里所用的机械方法，可使各种有可能影响定理成立的退化情况自然地逐一出现，并可视需要与否有步骤地逐一处理．与之相反，依据本章第 1 节的三例，可见通常欧几里得的证明方法对于退化情形的发现与处理，是近于盲目的，实际上也几乎是无能为力的．

为了说明本书的机械化方法，将再举一个较为复杂的例子．

对几何代数化极为重要的线性 Pascal 公理，是投影几何中所谓 Pascal 定理的一个退化情形．原来的 Pascal 定理是说，一个六角形的六个顶点在同一二次曲线上的充要条件是六角形三组对边的交点在同一直线上，这时的六角形(顶点依一定次序排列)称为 Pascal 六角形，对边交点所共的直线称为这一六角形的 Pascal 线．这一定理的叙述自然隐含了 generic 的假设．退化的情况是颇为复杂的．此外，定理叙述中牵涉到二次曲线，超出了原来 Hilbert 关于交点定理的机械化证明范围，但我们不难作某种转化，使定理仍变为交点定理的形式如下．

设 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 是一 generic 的 Pascal 六角形，其三组对边的交点(我们用记号$\wedge$来表示交点)

$$A_1A_2\wedge A_4A_5 \qquad A_2A_3\wedge A_5A_6 \qquad A_3A_4\wedge A_6A_1$$

在同一直线上．依原来的 Pascal 定理，$A_1, \cdots, A_6$ 六点将位于同一二次曲线上，因此如果将六点作任意排列，依原来的 Pascal 定理，所得六角形 $A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_6}$ 仍为一 Pascal 六角形，即交点

$$A_{i_1}A_{i_2}\wedge A_{i_4}A_{i_5} \qquad A_{i_2}A_3\wedge A_{i_5}A_{i_6} \qquad A_{i_3}A_{i_4}\wedge A_{i_6}A_{i_1}$$

仍在一直线上．这样可以完全避免涉及二次曲线，而依各种不同排列的类型有各种不同的交点定理．我们将任择其一作为说明．见下面的例子．

[例 4] **定理** 若 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 是一 generic 的 Pascal 六角形，则 $A_1A_4A_3A_2A_5A_6$ 也是 Pascal 六角形．换言之，若对 6 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 有

$$P = A_1A_2\wedge A_4A_5 \qquad Q = A_2A_3\wedge A_5A_6 \qquad R = A_3A_4\wedge A_6A_1$$

在一直线上，对于 generic 的情形，交点

$$P' = A_1A_4\wedge A_2A_5 \qquad Q' = A_3A_4\wedge A_5A_6 \qquad R' = A_2A_3\wedge A_6A_1$$

也在一直线上．

为简单起见，将取 A_6 为原点 O，并设 A_6A_1 与 A_6A_5 为不同直线，并取为两坐标轴 l_1 与 l_2，诸点则各取为

$$A_1 = (u_1, 0) \qquad A_2 = (u_2, u_3)$$
$$A_3 = (u_4, u_5) \qquad A_4 = (u_6, u_7)$$
$$R = A_3A_4\wedge A_6A_1 = (x_1, 0)$$
$$Q = A_2A_3\wedge A_5A_6 = (0, x_2)$$
$$Q' = A_3A_4\wedge A_5A_6 = (0, x_3)$$
$$R' = A_2A_3\wedge A_6A_1 = (x_4, 0)$$
$$P = A_1A_2\wedge A_4A_5 = (x_5, x_6)$$
$$A_5 = (0, x_7)$$
$$P' = A_1A_4\wedge A_2A_5 = (x_8, x_9)$$

假设中的几何条件为

$$R 在\ A_3A_4\ 上 \Longleftrightarrow (u_5 - u_7)x_1 + u_4u_7 - u_5u_6 = 0$$

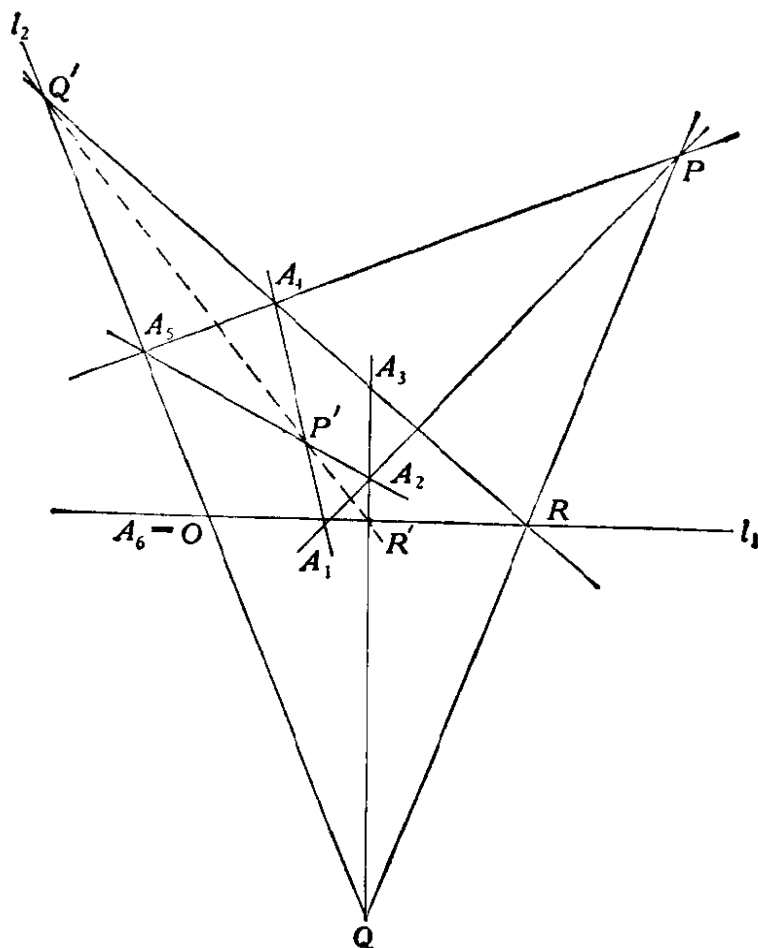


图 3.5

Q 在 A_2A_3 上 $\Longleftrightarrow (u_2-u_4)x_2-u_2u_5+u_3u_4=0$

Q' 在 A_3A_4 上 $\Longleftrightarrow (u_4-u_6)x_3-u_4u_7+u_5u_6=0$

R' 在 A_2A_3 上 $\Longleftrightarrow (u_3-u_5)x_4+u_2u_5-u_3u_4=0$

P 在 A_1A_2 上 $\Longleftrightarrow u_3x_5+(u_1-u_2)x_6-u_1u_3=0$

P, Q, R 在一直线上 $\Longleftrightarrow x_2x_5+x_1x_6-x_1x_2=0$

P 在 A_4A_5 上 $\Longleftrightarrow (u_6-x_5)x_7+u_7x_5-u_6x_6=0$

P' 在 A_1A_4 上 $\Longleftrightarrow u_7x_8+(u_1-u_6)x_9-u_1u_7=0$

P' 在 A_2A_5 上 $\Longleftrightarrow (u_3-x_7)x_8-u_2x_9+u_2x_7=0$

所需求证的几何关系为

P', Q', R' 在一直线上 $\Longleftrightarrow g\equiv x_3x_8+x_4x_9-x_3x_4=0$

从假设的诸关系解出诸 x,得

$$x_1=\frac{u_5u_6-u_4u_7}{u_5-u_7}=R_1(u)$$

$$x_2 = \frac{u_2u_5 - u_3u_4}{u_2 - u_4} = R_2(u)$$

$$x_3 = \frac{u_4u_7 - u_5u_6}{u_4 - u_6} = R_3(u)$$

$$x_4 = \frac{u_3u_4 - u_2u_5}{u_3 - u_5} = R_4(u)$$

$$x_5 = \frac{u_1u_3 - (u_1 - u_2)x_2}{u_3x_1 - (u_1 - u_2)x_2} \cdot x_1 = R_5(u)$$

$$x_6 = \frac{u_3x_2(x_1 - u_1)}{u_3x_1 - (u_1 - u_2)x_2} = R_6(u)$$

$$x_7 = \frac{u_7x_5 - u_6x_6}{x_5 - u_6} = R_7(u)$$

$$x_8 = \frac{u_2[u_1u_7 + (u_6 - u_1)x_7]}{(u_1-u_6)(u_3-x_7)+u_2u_7} = R_8(u)$$

$$x_9 = \frac{u_1u_3u_7 + (u_2 - u_1)u_7x_7}{(u_1-u_6)(u_3-x_7) + u_2u_7} = R_9(u)$$

引入的非退化条件为

$u_5 - u_7 \neq 0 \Longleftrightarrow A_3A_4$ 不平行于 l_1 轴

$u_2 - u_4 \neq 0 \Longleftrightarrow A_2A_3$ 不平行于 l_2 轴

$u_4 - u_6 \neq 0 \Longleftrightarrow A_3A_4$ 不平行于 l_2 轴

$u_3 - u_5 \neq 0 \Longleftrightarrow A_2A_3$ 不平行于 l_1 轴

$\alpha \equiv u_3x_1 - (u_1 - u_2)x_2 \neq 0 \Longleftrightarrow QR$不平行于 A_1A_2

$x_5 - u_6 \neq 0 \Longleftrightarrow PA_4$ 不平行于 l_2 轴

$\beta \equiv (u_1 - u_6)(u_3 - x_7) + u_2u_7 \neq 0 \Longleftrightarrow A_1A_4$ 不平行 A_2A_5

各项非退化条件还有更简单的几何说明．例如第三个非退化条件，由于 A_3A_4 必须与 l_2 轴有公共点 Q'，所以 A_3A_4 不平行于 l_2 轴意指二者不相重合，或 A_3，A_4，A_5，A_6 不在同一直线上．显然这些退化时的情形都缺少几何趣味而不值得进一步考虑．

在所有非退化条件都满足的情形下，可将 $x_i = R_i(u)$ 诸式代入终结的 g 式，经过反复的运算，易知

$$g = x_3x_8 + x_4x_9 - x_3x_4 = R_3R_8 + R_4R_9 - R_3R_4 = 0$$

因之定理成立.

[例 5] 定理同前.

若仍取 A_6 为原点 O, A_6A_1 与 A_5A_6 为座标轴 l_1, l_2, 取诸点的坐标为

$$\begin{array}{ll} A_1=(u_1, 0) & A_2=(u_2, u_3) \\ A_3=(u_4, u_5) & A_5=(0, u_6) \\ A_4=(u_7, x_1) & Q=(0, x_2) \\ R=(x_3, 0) & R'=(x_4, 0) \\ P=(x_5, x_6) & Q'=(0, x_7) \\ P'=(x_8, x_9) & \end{array}$$

则假设部份将为

$$A_4, A_5, P \text{ 共线} \Longleftrightarrow (x_1-u_6)x_5-u_7(x_6-u_6)=0$$

$$P, Q, R \text{ 共线} \Longleftrightarrow x_2x_5+x_3x_6-x_2x_3=0$$

$$A_3, A_4, R \text{ 共线} \Longleftrightarrow (x_1-u_5)x_3-u_4x_1+u_5u_7=0$$

$$A_1, A_2, P \text{ 共线} \Longleftrightarrow u_3x_5+(u_1-u_2)x_6-u_1u_3=0$$

$$A_2, A_3, Q \text{ 共线} \Longleftrightarrow (u_2-u_4)x_2-u_2u_5+u_3u_4=0$$

等等. 如果经过消去以逐个引入诸 x 时,将得关系式(在某些非退化条件成立的限制下)

$$Ax_1^2+Bx_1+C=0$$

等等,其中 A, B, C 为 $u_1, \cdots, u_7$ 的多项式. 在非退化条件 $A \neq 0$ 的情形下,所得为 x_1 的二次方程, 故不能用以前诸例的方法来证明同一定理.

本例与前例的区别在于: 在例 4 中, 定理已事先转化成为构造型的交点定理形式,而本例则否. 换言之, 在例 4 中, 图形中的各点依以下次序构造性地逐步引进:

先任取一点 A_6 作为原点 O.

过 O 任作两直线 l_1, l_2 取为坐标轴.

在 l_1 上任取一点 $A_1=(u_1, 0)$,

过 A_1 任作一直线并在上任取一点 $A_2=(u_2, u_3)$.

过 A_2 任作一直线并在上任取一点 $A_3=(u_4, u_5)$.

过 A_3 任作一直线并在上任取一点 $A_4=(u_6, u_7)$.

设 A_3A_4 与 l_1 相交,交点为 $R=(x_1, 0)$.

设 A_2A_3 与 l_2 相交,交点为 $Q=(0, x_2)$.

设 A_3A_4 与 l_2 相交,交点为 $Q'=(0, x_3)$.

设 A_2A_3 与 l_1 相交,交点为 $R'=(x_4, 0)$.

作连线 QR, 并设与 A_1A_2 相交,交点为 $P=(x_5, x_6)$.

作连线 PA_4 并设与 l_2 相交,交点为 $A_5=(0, x_7)$.

作连线 A_1A_4 与 A_2A_5, 并设二者相交,交点为 $P'=(x_8, x_9)$.
结论是 P', Q', R' 在一直线上.

显然,这样的叙述与原来的定理一致,但已变成构造型的.

3.5 Hilbert 机械化定理的证明

本节将给出本章第 3 节中所说 Hilbert 机械化定理的证明. 这一机械化定理的内容是针对 Pascal 几何中某一类交点定理而说的. Pascal 几何的附属数域将用 **N** 来表示. 机械化定理的证明在于给出这一类交点定理的机械化证法. 象上节例 5 所指出的那样,将局限这类交点定理于已经转化成构造型的那一类. 这种交点定理的特征是: 定理叙述中的那些点与直线是依照一个确定的步骤逐一引进或作出的. 而且每一次的引进或作法, 都是通过取任意点, 作任意线, 命两直线相交以及作平行线等一类方法得来的.

以下说明证明这一类构造型交点定理的机械步骤.

先任意选定一坐标系, 于是定理中的点与直线都用坐标的数偶与线性方程来表示. 数偶中的数以及方程的系数自然都属于几何的附属数域 **N**,以后不再说明.

我们将避免使用直线方程, 而全部用点坐标的数偶来表示. 此外,由于点与直线有些是任意选取的,有些是依据作法确定地给出的,因而在点的坐标表示中,有些坐标是任意的, 我们将用 u_i 来表示,这里视 u_i 为参数, 另一些坐标是依确定的方式根据几何条

件来决定的，我们将用 x_j 来表示. 在不必指明是哪一类坐标时，则用 α_k 来表示.

在所考虑的交点定理中牵涉到下面的一些作法:

1. 任意给定或选取一点.

这一点将用 (u_i, u_j) 来表示.

2. 任意给定或选取一直线.

我们可以任意给定或选取两点 (u_i, u_j) 与 (u_k, u_l)，直线即由这两点所定.

3. 过一点 (α_i, α_j) 任作一直线.

我们可代之以任取一点 (u_k, u_l)，这直线即由 (α_i, α_j) 与 (u_k, u_l) 所定.

4. 作已知两点的连线.

由于直线都已由两点来代替,这一作法可不再考虑.

5 在已作直线上任取一点.

设这一直线由已作两点 (α_i, α_j)，(α_k, α_l) 所定，则任取的一点可取为 (u_r, x_s) 或 (x_s, u_r)，满足下面的方程

$$\begin{vmatrix} u_r & x_s & 1 \\ \alpha_i & \alpha_j & 1 \\ \alpha_k & \alpha_l & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ 或 } \begin{vmatrix} x_s & u_r & 1 \\ \alpha_i & \alpha_j & 1 \\ \alpha_k & \alpha_l & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6. 任作一已作直线的平行线.

由于这一直线如前所示已由某两点 (α_i, α_j)，(α_k, α_l) 所定，所作平行线可代之以如下两点. 先任取一点 (u_m, u_n)，再任取一点 (u_r, x_s) 或 (x_s, u_r)，使其与 (u_m, u_n) 的连线与已作直线平行，即 x_s 满足方程

$$(\alpha_k - \alpha_i)(x_s - u_n) - (\alpha_l - \alpha_j)(u_r - u_m) = 0$$

或

$$(\alpha_l - \alpha_j)(x_s - u_m) - (\alpha_k - \alpha_i)(u_r - u_n) = 0$$

7. 过一已作点 (α_m, α_n) 作一已作直线的平行线.

设已作直线由两已作点 (α_i, α_j) 与 (α_k, α_l) 所定，我们可把所作平行线代之以一点 (u_r, x_s) 或 (x_s, u_r) 与 (α_m, α_n) 的连线，

使其与已作直线平行，即满足方程

$$(\alpha_k-\alpha_i)(x_s-\alpha_n)-(\alpha_l-\alpha_j)(u_r-\alpha_m)=0$$

或

$$(\alpha_l-\alpha_j)(x_s-\alpha_m)-(\alpha_k-\alpha_i)(u_r-\alpha_n)=0$$

8. 作两已作相交直线的交点。

设两已作直线各由点 (α_i, α_j)，(α_k, α_l) 与 (α_p, α_q)，(α_r, α_s) 所确定．所作交点可取为 (x_g, x_h)，满足方程组

$$(\alpha_j-\alpha_l)x_g-(\alpha_i-\alpha_k)x_h+\alpha_i\alpha_l-\alpha_j\alpha_k=0$$

$$(\alpha_q-\alpha_s)x_g-(\alpha_p-\alpha_r)x_h+\alpha_p\alpha_s-\alpha_q\alpha_r=0$$

记方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_j-\alpha_l, & \alpha_k-\alpha_i\\ \alpha_q-\alpha_s, & \alpha_r-\alpha_p\end{vmatrix}$$

今引入非退化条件

$$D\neq 0$$

在这一非退化条件下，原方程组将等价于下面二方程

$$Dx_g+(\alpha_r-\alpha_p)(\alpha_i\alpha_l-\alpha_j\alpha_k)-(\alpha_k-\alpha_i)(\alpha_p\alpha_s-\alpha_q\alpha_r)=0$$

$$-Dx_h+(\alpha_q-\alpha_s)(\alpha_i\alpha_l-\alpha_j\alpha_k)-(\alpha_j-\alpha_l)(\alpha_p\alpha_s-\alpha_q\alpha_r)=0$$

在 $D=0$ 时，或则原方程组矛盾，因而定理不成立；或则 x_g, x_h 之一或二者取任意值而视为参数 u，另一 x 则由原方程组之一来确定。

9. 过一已作点 (α_m, α_n) 作一已作直线的平行线并与另一已作直线相交以作交点。

设两已作直线各由点 (α_i, α_j)，(α_k, α_l) 与 (α_p, α_q)，(α_r, α_s)所定．命所作点为 (x_g, x_h)，则 x_g，x_h 将满足下面的方程组

$$(\alpha_k-\alpha_i)(x_h-\alpha_n)-(\alpha_l-\alpha_j)(x_g-\alpha_m)=0$$

$$(\alpha_q-\alpha_s)x_g-(\alpha_p-\alpha_r)x_h+\alpha_p\alpha_s-\alpha_q\alpha_r=0$$

同前引入非退化条件

$$D\neq 0$$

则原方程组等价于下面形式的二方程：

$$Dx_g+\cdots=0$$

$$Dx_h+\cdots=0$$

在 $D=0$ 时，或则原方程矛盾而定理不成立，或则可将 x_g，x_h 之一或二者取为参数而将另一 x 由原方程组之一来确定.

10. 过两已作点各作两已作直线的平行线，命其相交以作交点.

这与 8,9 相似.

由于我们只考虑构造型交点定理，定理中的点与直线将依一定次序逐个出现，因而可以把各点坐标（直线由其上的两点来代替，见前）依据点与直线出现的次序排成一定次序：

$$u_1 \prec u_2 \prec \cdots \prec u_m$$

$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_n$$

当一点系依前面 8,9 或 10 的方式所引进时，其坐标可取为两相继的 x，即把点取作 (x_g, x_{g+1}).

今依前面 1—10 可将诸 x_i 所须满足的方程以及相伴的非退化条件逐步引入如下.

先考虑定理叙述中构造步骤的第一步，并设已引进若干参数 u_i，此时可视作法属于 1—4，5—7 或 8—10 而分成三种情形.

若作法属于 1—4，应引入新的 u_i.

若作法属于 5—7，则将得一如下形状的方程：

$$A_1 x_1 + B_1 = 0$$

其中 A_1，B_1 都是诸已引入参数 $u_1, \cdots, u_m$ 的多项式，以 $\mathbf{N}$ 中的数为系数. 用通常使用的记号，即

$$A_1, B_1 \in \mathbf{N}[u_1, \cdots, u_m]$$

在 A_1 恒等于 0 而 B_1 不恒等于 0 时，即引入非退化条件

$$B_1 \neq 0$$

此时工作停止，并指出在上述非退化条件下定理假设有矛盾. 在 A_1，B_1 都恒等于 0 时，可引入一新参数 u_{m+1}，并置

$$x_1 = u_{m+1}$$

在 A_1 不恒等于 0 时，即引入非退化条件

$$A_1 \neq 0$$

并解出 x_1，

$$x_1 = -\frac{B_1}{A_1}$$

若作法属于 8—10，则将得如下两个方程:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1 = 0$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2 = 0$$

其中 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ 都$\in \mathbf{N}[u_1, \cdots, u_m]$。

考虑系数多项式

$$P = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \qquad Q_1 = \begin{vmatrix} A_{12} & B_1 \\ A_{22} & B_2 \end{vmatrix} \qquad Q_2 = \begin{vmatrix} B_1 & A_{11} \\ B_2 & A_{21} \end{vmatrix}$$

在 P_1 不恒等于 0，即

$$秩\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = 2$$

时，可引入非退化条件

$$P \neq 0$$

并解出 x_1, x_2,

$$x_1 = -\frac{Q_1}{P} \qquad x_2 = -\frac{Q_2}{P}$$

在 P 恒等于 0，而 $A_{11}, \cdots, A_{22}$ 不全恒等于 0，即

$$秩\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = 1$$

时，有两不全为 0 的多项式 $a_1, a_2 \in \mathbf{N}[u_1, \cdots, u_m]$，使

$$a_1A_{11} + a_2A_{21} \equiv 0$$

$$a_1A_{12} + a_2A_{22} \equiv 0$$

这时从原方程组得

$$a_1B_1 + a_2B_2 = 0$$

此时若 $a_1B_1 + a_2B_2$ 不恒等于 0，则引入非退化条件

$$a_1B_1 + a_2B_2 \neq 0$$

并指出在这一非退化条件下定理的假设有矛盾而工作停止.

在 P 与 $a_1B_1 + a_2B_2$ 都恒等于 0 而 $A_{11}, \cdots, A_{22}$ 不全恒等于 0，例如 A_{11} 不恒等于 0 时，可引入新参数 u_{m+1} 与非退化条件

$$A_{11} \neq 0$$

并解出 x_1, x_2,

$$x_1 = -\frac{A_{12}u_{m+1} + B_1}{A_{11}} \qquad x_2 = u_{m+1}$$

在 $A_{11}, \cdots, A_{22}$ 都恒等于 0 而 B_1, B_2 不全恒等于 0 时，可引入非退化条件

$$B_1 \neq 0 \quad 或/与 \quad B_2 \neq 0$$

并指出在这些非退化条件下定理假设有矛盾而工作停止。

最后在 $A_{11}, \cdots, A_{22}, B_1, B_2$ 都恒等于 0 时，即引入新参数 u_{m+1}, u_{m+2}, 并置

$$x_1 = u_{m+1} \qquad x_2 = u_{m+2}$$

在不出现定理假设有矛盾而工作停止的情况下，将依照定理叙述中的构造性步骤进行第二步。

今假定依照定理叙述中的构造性步骤已进行至某一步但非末一步，此时已引进若干新参数

$$u_{m+1}, \cdots, u_{m+s}$$

并获得若干非退化条件

$$D_1 \neq 0, \cdots, D_j \neq 0$$

以及已解出若干 $x_1, \cdots, x_i$,

$$x_1 = Q_1/P_1, \cdots, x_i = Q_i/P_i$$

其中诸多项式

$$D_1, \cdots, D_j, P_1, \cdots, P_i, Q_1, \cdots, Q_i \in$$
$$\mathbf{N}[u_1, \cdots, u_m, u_{m+1}, \cdots, u_{m+s}]$$

且诸多项式 $P_1, \cdots, P_i$ 都是 $D_1, \cdots, D_j$ 的幂积（即非负乘幂的乘积）。

假定这时并未出现定理假设有矛盾而须停止进行的情况，则进行下一步，这时视作法属于 1—4, 5—7 或 8—10，或引入若干种参数，或得一方程

$$A_{i+1}x_{i+1} + B_{i+1} = 0$$

或得两个方程

$$A_{i+1,1}x_{i+1} + A_{i+1,2}x_{i+2} + B_{i+1} = 0$$

$$A_{i+2,1}x_{i+1} + A_{i+2,2}x_{i+2} + B_{i+2} = 0$$

其中诸 A, B 都是系数在 $\mathbf{N}$ 中的 $u_1, \cdots, u_{m+s}, x_1, \cdots, x_i$ 的多项式.

今将前所得 $x_1, \cdots, x_i$ 的有理式代入这些方程,则在非退化情形 $D_1 \neq 0, \cdots, D_j \neq 0$ 下有 $P_1 \neq 0, \cdots, P_i \neq 0$, 因而通分后得方程

$$A^*_{i+1}x_{i+1} + B^*_{i+1} = 0$$

或方程组

$$A^*_{i+1,1}x_{i+1} + A^*_{i+1,2}x_{i+2} + B^*_{i+1} = 0$$

$$A^*_{i+2,1}x_{i+1} + A^*_{i+2,2}x_{i+2} + B^*_{i+2} = 0$$

其中诸 A^*, B^* 都是系数在 $\mathbf{N}$ 中的 $u_1, \cdots, u_{m+s}$ 的多项式.

与以前同样处理可知,或在引入某些新的非退化条件

$$D_{j+1} \neq 0 \text{（或 } D_{j+1} \neq 0,\ D_{j+2} \neq 0\text{）}$$

下定理假设有矛盾而停止工作, 或可引入若干新参数 u_{m+s+1}（或 u_{m+s+1}, u_{m+s+2}）以及若干新的非退化条件如上, 并解出 x_{i+1}（或 x_{i+1}, x_{i+2}）得

$$x_{i+1} = Q_{i+1}/P_{i+1} \text{（或 } x_{i+1} = Q_{i+1}/P_{i+1},\ x_{i+2} = Q_{i+2}/P_{i+2}\text{）}$$

其中诸 D_{j+1}（或 D_{j+1}, D_{j+2}）以及 P_{i+1}, Q_{i+1}（或 $P_{i+1}, P_{i+2}, Q_{i+1}, Q_{i+2}$）都是 $u_1, \cdots, u_{m+s}$ 以及可能引入的新参数 u_{m+s+1}（或 u_{m+s+1}, u_{m+s+2}）的多项式, 且 P_{i+1}（或 P_{i+1}, P_{i+2}）都是 $D_1, \cdots, D_j$ 以及可能引入的新多项式 D_{j+1}（或 D_{j+1}, D_{j+2}）的幂积.

如果还未达到最后一步, 则可再继续进行下一步的构造性步骤. 如此继续进行,最后必得下述两种情形之一:

第一情形: 除去定理叙述中已规定的那些参数 $u_1, \cdots, u_m$ 外,又引入若干新参数 $u_{m+1}, \cdots, u_{m+t}$, 每一新参数都是某一坐标 x, 即

$$x_{i_{m+1}} = u_{m+1}, \cdots, x_{i_{m+t}} = u_{m+t}$$

此外又获得若干非退化条件

$$D_1 \neq 0, \cdots, D_r \neq 0$$

其中诸 D 都是新旧参数,即 $u_1, \cdots, u_m$ 与 $x_{i_{m+1}}, \cdots, x_{i_{m+t}}$ 的多

项式．在这些非退化条件下，定理假设有矛盾而工作停止．

第二种情形：引入若干新参数 $u_1, \cdots, u_{m+t}$ 与若干非退化条件如上，又在这些非退化条件下可解出诸 x,

$$x_1 = \frac{Q_1}{P_1} \qquad \cdots \quad x_n = \frac{Q_n}{P_n}$$

其中诸 P, Q 都是新旧参数 $u_1, \cdots, u_{m+t}$ 的多项式，且诸 P 都是 $D_1, \cdots, D_r$ 的幂积．

原来交点定理的终结部份可表为若干个方程

$$S_k(u_1, \cdots, u_m, x_1, \cdots, x_n) = 0$$

其中，

$$S_k \in \mathbf{N}[u_1, \cdots, u_m, x_1, \cdots, x_n]$$

今设处于第二种情形，则可在非退化条件

$$D_1 \neq 0, \cdots, \quad D_r \neq 0$$

成立的假定下，将所解出的

$$x_1 = Q_1/P_1 \qquad \cdots x_n = Q_n/P_n$$

代入 S_k，得

$$S_k = S_k \ \left(u_1, \cdots, u_m, \frac{Q_1}{P_1}, \cdots, \frac{Q_n}{P_n}\right) = \frac{R'_k}{R''_k}$$

其中 R'_k, R''_k 都是诸新旧参数 $u_1, \cdots, u_{m+t}$ 的多项式，且 R''_k 是诸 P，因而是诸 D 的幂积，而在非退化条件下不为 0．显然，经过虽极繁复但极容易的机械运算可判知 R'_k 是否恒等于 0，因而可判断在非退化条件 $D_1 \neq 0, \cdots, D_r \neq 0$ 满足的假定下，定理是否成立．

由上可作出下面的结论：

对于任何构造型的交点定理，恒可选取坐标 $u_1, \cdots, u_m$, $x_1, \cdots, x_n$，通过确定的机械步骤，使在有限步之后，能在 x 坐标中挑出一部份作为新参数，得出一组新旧坐标间的多项式 $D_1, \cdots, D_r$，并能判断在非退化条件

$$D_1 \neq 0 \qquad \cdots \qquad D_r \neq 0$$

满足的假定下，恰有下列情形之一成立：

1. 定理的假设本身有矛盾.

2. 定理成立.

3. 定理不成立.

在定理成立的情形下，上述的机械步骤即构成了所考虑交点定理的一个机械化证明以及相应的非退化限制条件.

至此，Hilbert 的机械化定理已完全证明.

第四章　(常用)无序几何的机械化定理

4.1 概　　述

这章是本书最主要的一章，目的在于证明如果一种几何的附属数系是一个数域，即乘法是可交换的，则假设与终结部分都可由多项式等式关系来表达的那类定理的证明可以机械化，这一类定理称为**等式型定理**．事实上，它包括了几何中最主要的大部分定理．虽然排除了带有次序关系因而代数上牵涉到多项式不等式关系的那类定理，但后者一般只在中学范围的欧几里得平面几何中多有出现，此外并不多见．在现代的几何，例如代数几何中，附属数域往往是复数域或特征为 0 的任意数域，因此根本不出现次序关系．所以，把机械化证明的范围局限于只用等式关系就可表达的那部分等式型定理，并不是什么重要的限制，而是比较符合几何发展现状的．

依据第三章 3.2 和 3.3 节，等式型定理证明的机械化问题可归结为如下纯代数形式的机械化问题．

机械化问题(代数形式)．

设数域$\mathbf{K}$与变量

$$x_1,\cdots,x_n$$

的若干$\mathbf{K}$中的多项式

$$f_i(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{K}[x_1,\cdots,x_n],\ i\in I$$

以及另一多项式

$$g(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{K}[x_1,\cdots,x_n]$$

求一机械化方法，使在有限步内能得出有限多个**非退化条件**：

$$D_j(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{K}[x_1,\cdots,x_n]\qquad j\in J$$

并判定对 $\mathbf{K}$ 的某一扩域 $\overline{\mathbf{K}}$，下面的结论是否成立：

1. 对任意 $a_1, \cdots, a_n \in \bar{\mathbf{K}}$, 只需

$$f_i(a_1, \cdots, a_n) = 0 \qquad i \in I$$
$$D_j(a_1, \cdots, a_n) \neq 0 \qquad j \in J$$

即有

$$g(a_1, \cdots, a_n) = 0$$

在(1)成立时,我们将称等式

$$g(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

在非退化条件

$$D_j(x_1, \cdots, x_n) \neq 0 \qquad j \in J$$

下,可从等式

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0 \qquad i \in I$$

推出. 又上述非退化条件 D_j 不能是任意的,它必须符合下面的要求,即任一

$$D_j(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

不能从

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0 \qquad i \in I$$

推出. 换言之,即对每一 $j \in J$, 至少有一组

$$a_1, \cdots, a_n \in \bar{\mathbf{K}}$$

使

$$f_i(a_1, \cdots, a_n) = 0 \qquad i \in I$$

但

$$D_j(a_1, \cdots, a_n) \neq 0$$

参阅第三章 3.3 节关于附加条件的说明.

在叙述(1)中,若 $\bar{\mathbf{K}}$ 是原来几何的附属数域 $\mathbf{K}$,则每一组数 $a_1, \cdots, a_n \in \bar{\mathbf{K}}$ 相当于原来定理中满足假设条件的一个几何图象,而 $g(a_1, \cdots, a_n) = 0$ 相当于说定理的终结对这一几何图象成立.因此上面代数形式机械化问题的解决,在 $\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}$ 时将给出相应几何定理证明可以机械化的结论,即相应几何的机械化定理成立.

以下几节将致力于解决上述代数形式机械化问题. 但在我们的解答中,(1)中的 $\bar{\mathbf{K}}$ 并不是原来几何的附属数域 $\mathbf{K}$, 而是附属数

域$\mathbf{K}$的一个代数闭的扩域．就机械化证明在几何上的目的来说，这已经足够了．理由是，如果(1)对于扩域$\overline{\mathbf{K}}$成立，则对于原来的数域$\mathbf{K}$也成立，因而相应的几何定理成立．如果(1)对于扩域$\overline{\mathbf{K}}$不成立，虽然不能由此得出(1)对于$\mathbf{K}$也不成立，因而也不能得出相应几何定理不成立的结论，但至少指出了这一几何定理成立的可能性不大，或至少在几何图象范围稍加扩充(例如由实的图象扩充为复的图象时)时不能成立．如果我们应用代数几何的语言并应用一条代数几何中关于代数簇维数不因基本数域而异这一条定理，则至少对常用几何来说，不会出现上面的情形．不论如何，由于我们希望的是得出正面的几何定理的证明，而不在于其反面的结果，因此对于$\overline{\mathbf{K}}$是否与$\mathbf{K}$相同这一点无关紧要．为此我们将把上章 3.3 节关于几何定理机械化证法以及定理证明可以机械化的定义扩充到可以包括上面那种情形．详言之，当$\overline{\mathbf{K}}$取为相应几何附属数域$\mathbf{K}$的某一扩域而上述代数形式的机械化问题有解答时，仍称相应几何的定理证明可以**机械化**．当所考虑的定理确实成立时，所用代数的机械化过程也就给出了这一几何定理的**机械化证明**．在这些较广义的概念下，这章将给出代数形式机械化问题的解答，并由此导出下面的定理：

机械化定理　第二章中常用几何的各种无序关属几何，如无序 Pascal 几何、无序垂直几何、无序度量几何等(其中交线 Pascal 公理成立)，其几何定理都有机械化证法．

上述代数问题实际上是一个代数几何的问题，其解答依赖于代数几何这一门较现代的科学．但是，现代的代数几何基本上已发展为一种纯粹是存在性的理论．由于我们需要的解答是一种机械化的方法，因此我们需要的是一种构造性的理论，纯粹存在性的理论是不足以提供必要的机械化方法的．所幸的是，R. F. Ritt [1, 2]早已发展了这种构造性的代数几何，恰好可以满足我们的需要．由于 Ritt 的著作一般很少为人所知，而且他的论证是分析性质的，超出了纯代数的范围，因此在本章中将重新对 Ritt 的理论与方法改写成符合我们要求的形式．除此之外，Ritt 的代数几

何构造性理论本身也有值得重视之处．例如代数簇的维数概念是代数几何中最基本、最直观的原始概念之一，代数簇与一超平面交截的维数定理也是代数几何中最基本、最直观的定理之一．但在流行的代数几何著作中，不论是概念的引入还是定理的证明都不简单，都要用到一些艰深的方法，而且都是存在性的．相反，Ritt 的理论不仅给出了初等而直接的证明，而且还给出了确定维数的构造性方法（参见 4.6 节）．

4.2 多项式的因子分解

设**K**是一个固定的数域，我们将局限于**K**的特征为 0 的情形，以后不再明言．象通常那样，以**K**中的数为系数，变量为 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的多项式全体所成的环记为 $\mathbf{K}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$．同样，若系数在某一环**A**中，则相应的多项式环记为 $\mathbf{A}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$．

设 $\overline{\mathbf{K}}$ 是包含 **K** 的任一数域，称为**K**的一个扩域．对在 $\overline{\mathbf{K}}$ 中但不在 **K** 中的 θ，试考虑数列

$$1, \theta, \theta^2, \cdots, \theta^m, \cdots$$

记 $\mathbf{K}(\theta)$ 为 $\overline{\mathbf{K}}$ 中所有商 $f(\theta)/g(\theta)$ 的全体，其中 f,g 都是以**K**中数为系数的 θ 的多项式，而 $g(\theta)$ 在 $\overline{\mathbf{K}}$ 中不等于 0．在 $\overline{\mathbf{K}}$ 的运算之下，$\mathbf{K}(\theta)$ 成一包含**K**的数域，称为**K**添加 θ 所得的简单扩域．可以有下面两种情形．

第一种情形1：由 θ 乘幂所成的数列，任意有限多个都对**K**线性无关，这时称 θ 对**K**而言是超越的数，$\mathbf{K}(\theta)$ 为**K**添加 θ 所得的超越扩域．

第二种情形 2：数列中有有限多个对**K**线性相关．命 m 为使 $1, \theta, \cdots, \theta^m$ 对**K**线性相关的最小整数，则有**K**中不全为 0 的数 a_0，a_1，$\cdots$，a_m，使

$$a_0 + a_1\theta + \cdots + a_m\theta^m = 0$$

但对**K**中任意不全为 0 的 $n < m$ 个数 b_0，b_1，$\cdots b_n$ 都有

$$b_0 + b_1\theta + \cdots + b_n\theta^n \neq 0 \qquad n < m$$

因而特别有 $a_m \neq 0$. 这时称 θ 是对 $\mathbf{K}$ 代数的数，$\mathbf{K}(\theta)$ 是 $\mathbf{K}$ 添加 θ 后所得的代数扩域，m 为 θ 或 $\mathbf{K}(\theta)$ 对 $\mathbf{K}$ 的次数.

在第二种情形中记多项式 $a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ 为

$$P_\theta(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m \in \mathbf{K}[x]$$ 则 $P_\theta(x)$

显然在 $\mathbf{K}[x]$ 中不可约，即不能分解成 $\mathbf{K}[x]$ 中两个次数大于等于 1 ($\geqslant 1$)的多项式的乘积，特别应有 $a_0 \neq 0$. 显然，$P_\theta(x)$ 只能唯一确定至 $\mathbf{K}$ 中的一个非 0 因子. 我们将称任一这样的多项式 $P_\theta(x)$ 为 θ 的一个添加多项式. 它的特征是 $P_\theta(x)$ 在 $\mathbf{K}[x]$ 中不可约，且

$$P_\theta(\theta) = 0$$

即 θ 是 $P_\theta(x) = 0$ 在 $\mathbf{K}$ 的某一扩域中的一个解.

设 $f(\theta)/g(\theta)$ 是 $\mathbf{K}(\theta)$ 中的任意一数，此处 $f(x)$，$g(x) \in \mathbf{K}[x]$，且 $g(\theta) \neq 0$. 因 $P_\theta(x)$ 在 $K[x]$ 中不可约，故 $g(x)$ 与 $P_\theta(x)$ 不能有公共因子. 依多项式的除法算法应有多项式 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，$Q(x)$，$R(x) \in \mathbf{K}[x]$，使

$$\varphi(x)g(x) + \psi(x)P_\theta(x) = 1$$
$$f(x)\varphi(x) = Q(x)P_\theta(x) + R(x)$$

其中 $\varphi(x)$，$R(x)$ 对 x 的次数各小于 $P_\theta(x)$ 中 x 的次数，即 θ 对 $\mathbf{K}$ 的次数 m，而 $\psi(x)$ 中 x 的次数小于 $g(x)$ 中 x 的次数. 由于 $P_\theta(\theta) = 0$，故

$$\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = f(\theta)\varphi(\theta) = R(\theta)$$

因而 $\mathbf{K}(\theta)$ 中任意一数可表为 θ 的一个次数小于等于 ($\leqslant$)$m-1$ 的多项式，且这样的表示方法显然是唯一的，并可通过代数运算构造性地求得.

今设数域 $\mathbf{K}$ 是一个有么元素的整环 $\mathbf{A}$ 的商域. 则不论 $\mathbf{K}(\theta)$ 是超越扩域还是代数扩域，以 $\mathbf{A}$ 为系数 θ 的多项式全体所成 $\mathbf{A}[\theta]$ 也成一有么元素的整环，且 $\mathbf{K}(\theta)$ 是 $\mathbf{A}[\theta]$ 的商域. 依据 Gauss 定理，一个 $\mathbf{A}[x]$ 中的多项式，若能在 $\mathbf{K}[x]$ 中分解因子，则在 $\mathbf{A}[x]$ 中即已能分解因子，又若 $\mathbf{A}$ 有因子分解的唯一性性质(即所谓 UFD

性质)，则 $\mathbf{A}[x]$ 也有因子分解的唯一性性质．以下所考虑的整环就将假定具有这些性质，不再作说明．一个最简单的具体实例即 $\mathbf{A}$ 是整数环．

本节所讨论的主要问题是：

设已知如何将 $\mathbf{A}$ 中的数分解成不可约因子，问若 z 是一变量时，

1. 如何将 $\mathbf{A}[z]$ 中的多项式分解成不可约因子．

2. 如何将 $\mathbf{A}[\theta][z]=\mathbf{A}[\theta, z]$ 中任一多项式分解成不可约因子．这里 $\mathbf{K}(\theta)$ 是 $\mathbf{A}$ 的商域 $\mathbf{K}$ 添加 θ 的简单扩域．

在大多数代数学著作中，往往满足于这两问题解答的存在性与可能性，而没有涉及构造性的具体作法．这对于机械化的要求是根本不够的．在 Van der Waerden, Moderne Algebra 1930 年的第一版中，曾经有两整段(§23 与 §37)致力于在有限步内解决上述两个问题的机械方法，但在以后的几版中，相当于 §23 的内容虽然还保存着，但相当于 §37 的内容则完全删去了．由于这些内容对于几何证明的机械化方法颇为重要而在流行书籍中又不易见到，下面将作较详细的介绍．

由于我们局限于 $\mathbf{K}$ 的特征为 0 的情形，因此以 $\mathbf{K}$ 为商域的整环 $\mathbf{A}$ 必须含有无限多个元素．如以 e 表 $\mathbf{A}$ 的幺元素，则 ne(n 为整数)即是这样一组无限多个元素．事实上，如果 $\mathbf{A}$ 只有有限多个元素，则对于任一 $\mathbf{A}[z]$ 或 $\mathbf{A}[\theta][z]$ 中的多项式 $f(z)$，仅有有限多个多项式有可能成为 $f(z)$ 的因子．将这有限多个多项式逐一试除 $f(z)$，即可在有限步后判定 $f(z)$ 是否不可约，并在可约的情形下分解成不可约因子．因此对于 $\mathbf{A}$ 有限的情形，解决上述两个问题是容易的．

下面我们只考虑 $\mathbf{A}$ 无限而商域 $\mathbf{K}$ 的特征为 0 的情形，这时问题 2 可按 θ 对 $\mathbf{A}$ 是超越的还是代数的而分成两种情形．对于前一种情形，可改写 θ 为另一变量 y，而问题 2 变为将 $\mathbf{A}[y, z]$ 中两个变量的多项式分解因子．与问题 1 合在一起，可提出更一般的问题，即将任意多个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的 $\mathbf{A}[x_1, \cdots, x_n]$ 中多项式

分解因子的问题．我们可把这些问题的解答归结成下面的两个定理．

定理 1 设**A**是一有么元素的整环，且已知有一机械方法可在有限步内将**A**中任意一数唯一地分解成不可约因子（确定至**A**中的可逆因子），则有一机械方法可在有限步内将$\mathbf{A}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$中任一多项式分解成不可约因子（确定至**A**的可逆因子）．

定理 2 设**A**如定理 1，而**K**是**A**的商域，且$\mathbf{K}(\theta)$是K添加θ的代数扩域，θ的添加多项式为

$$P_\theta(y) = a_0 y^m + a_1 y^{m+1} + \cdots + a_m \in \mathbf{A}[y]$$

这里 $a_i \in A$，$a_0 a_m \neq 0$，且 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 在**A**中无不可逆的公共因子，则有一机械方法可在有限步内将 $\mathbf{A}[\theta][z]$ 中任一多项式分解成不可约因子（确定至**A**中的可逆因子）．

定理 1 的证明如下（**A**无限）．

设所给多项式为

$$f(x_1, \cdots x_n) \in \mathbf{A}[x_1, \cdots, x_n]、$$

取m大于f中任一x_i的次数，引入新变量t，并置

$$x_1 = t \qquad x_2 = t^m \qquad \cdots \qquad x_n = t^{m^{n-1}}$$

则

$$x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} = t^{k_1 + k_2 m + \cdots + k_n m^{n-1}}$$

在 $0 \leqslant k_i \leqslant m-1$ 时，在上式左边每一x_i的次数小于m的x的幂积与右边次数小于 m^n 的t乘幂之间建立了一个一一对应关系，因此也在 $\mathbf{A}[x_1, \cdots x_m]$ 中每一x_i次数都小于m的多项式与$\mathbf{A}[t]$中次数小于m^n的多项式之间建立了一个一一对应关系．设f对应于F：

$$f(x_1, \cdots, x_n) = F(t)$$

假设已知 $F(t)$ 如何分解为不可约因子

$$F(t) = F_1(t) \cdots F_s(t)$$

则根据上面的一一对应关系即得相应f的不可约因子分解

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f_1(x_1, \cdots, x_n) \cdots f_s(x_1, \cdots, x_n)$$

其中 $f_i(x_1, \cdots, x_n) = F_i(t)$．所以$n$个变量 $x_1, \cdots, x_n$ 多项式的

因子分解可归结为一个变量多项式的因子分解。

今考虑一个变量 t 的多项式 $F(t)\in \mathbf{A}[t]$，F 的次数设为 r。由 Gauss 定理，$F(t)$ 在 $\mathbf{A}[t]$ 中的因子分解与 $F(t)$ 在$\mathbf{K}[t]$中的因子分解问题相同。若 F 能在 $\mathbf{K}[t]$ 因而在 $\mathbf{A}[t]$ 中能分解成次数大于等于（$\geqslant$）1 的两个不可约因子：$F(t)=\varphi(t)\cdot\phi(t)$，其中 $\varphi(t)$ 的次数小于等于 $\phi(t)$ 的次数，则 $\varphi(t)$ 的次数设为 q 时，应小于等于 $[r/2]$，即小于等于 $r/2$ 的最大整数。我们应提供一机械方法使在有限步后或肯定这样的因子不存在，使得 F 不再能分解因子，即不可约，或给出一个因子 $\varphi(t)$ 来。对于后一种情形应用除法算法可得 $F(t)$ 的另一因子 $\phi(t)$，于是再应用同一机械方法于 $\varphi(t)$ 与 $\phi(t)$，最后即可得出 $F(t)$ 的不可约因子分解。

为此依次命 $q=1,2,\cdots,[r/2]$，并考虑是否有 q 次的多项式可作为 $F(t)$ 的因子。由于$\mathbf{A}$无限，故可在$\mathbf{A}$中选取 $q+1$ 个互不相等的元素 $a_0,a_1,\cdots a_q$，例如 $a_k=ke$，e 为$\mathbf{A}$的么元素。今对任意 $c_i\in\mathbf{A}$作多项式

$$\varphi(t)=\sum_{i=0}^{q}c_i\cdot\frac{(t-a_0)\cdots(t-a_{i-1})(t-a_{i+1})\cdots(t-a_q)}{(a_i-a_0)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_q)}\in\mathbf{K}[t]$$

于是 $\varphi(t)$ 就是使

$$\varphi(a_i)=c_i\qquad i=1,\cdots,q$$

的 q 次多项式。若 $\varphi(t)$ 是 $F(t)$ 在 $\mathbf{A}[t]$ 中的因子，则 $\varphi(a_i)=c_i$ 应是 $F(a_i)\in\mathbf{A}$ 的因子。由假设已知，可通过$\mathbf{A}$中分解因子的机械方法得知 $F(a_i)$ 的所有可能的因子，故这样的 c_i 只能有有限多个，且可通过机械方法求得。于是有可能作为 $F(t)$ 因子的次数为 q 的多项式的 $\varphi(t)$ 只有有限多个。将这有限多个多项式逐一试除 $F(t)$ 即可机械地得知 $F(t)$ 是否能分解因子，并在可能时得出这样的一个因子，且如前所述即可在有限步后得出 $F(t)$ 的不可约因子分解。这就证明了定理。

定理 2 的证明要比定理 1 难得多。我们将依据 Trager 在[1]中对 Van der Waerden 在[1] §37 中证明的改进形式来缮述。为

此先作一些准备如下.

设代数扩域 $\mathbf{K}(\theta)$ 的添加多项式为

$$P_\theta(y) = y^m + a_1 y^{m-1} + \cdots + a_m \in \mathbf{K}[y]$$

根据数域的扩张理论, $\mathbf{K}$ 有一扩域 $\tilde{\mathbf{K}}$,使 $P_\theta(y)$ 作为 $\tilde{\mathbf{K}}[y]$ 中的多项式可完全分解为线性因子:

$$P_\theta(y) = (y - \theta_1)(y - \theta_2)\cdots(y - \theta_m)$$

其中 $\theta_1 = \theta$, 诸 $\theta_2, \cdots, \theta_m$ 则称为 θ 的共轭元素. 这里只需知 θ^i 存在而不必具体作出, 真正需要知道的只是 $(-1)^j a_j$ 为诸 θ_i 间的初等对称函数这一事实即可.

今设 $f(\theta, z)$ 是 $\mathbf{K}(\theta)[z] = \mathbf{K}[\theta, z]$中的一个多项式.则乘积

$$\mathrm{Norm}\, f(\theta, z) = f(\theta_1, z) \cdot f(\theta_2, z) \cdots f(\theta_m, z)$$

称为 f 的范式. 在将乘积展开时,每一 z 的幂次的系数是 $\theta_1, \cdots \theta_m$ 的对称函数,因而依据对称函数的基本定理, 它们都是 $a_1, \cdots, a_m$ 的多项式,且可直接从 f 以及 P_θ 机械地算出, 而不必考虑 θ_i 的真正形式为何.

引理 1 设 $f(\theta, z)$ 在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中不可约, 则 Norm f 是 $\mathbf{K}[z]$中一个不可约多项式的乘幂.

证 设此引理不成立,则可设

$$\mathrm{Norm}\, f = g(z) \cdot h(z)$$

其中 g, h 都是 $\mathbf{K}[z]$ 中次数大于等于 1 的多项式,且g, h在$\mathbf{K}[z]$中无公共因子. 由于 $f(\theta, z)$ 不可约, 故必为 g 或 h 在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 的一个因子. 设 $f(\theta, z)$ 是 g 的因子,则 Norm $f(\theta, z)$ 将是Norm $g = g^m$ 的因子. 故 gh 是 g^m 的因子,这与 g, h 无公因子的假定相违. 证毕.

引理 2 有一机械方法使对任一 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中无重因子的多项式 $f(\theta, z)$ 可在有限步内得出一 $\mathbf{K}[z]$ 中无重因子的多项式 $g(z)$,并使在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中, $g(z)$ 以 $f(\theta, z)$ 为一因子.

证 先机械地作出 Norm $f = G(z) \in \mathbf{K}[z]$. 作 $G(z)$ 的形式微分 $G'(z)$, 并用辗转相除法求出 $G(z)$ 与 $G'(z)$ 的最大公约式 $D(z)$, 则 $g(z) = G(z)/D(z)$ 即如所求. 盖设 $f(\theta, z)$ 在$\mathbf{K}(\theta)$

$[z]$中分解成不相同不可约因子的乘积 $f_1(\theta, z)\cdots f_r(\theta, z)$，则依引理1有

$$G(z) = \text{Norm}\, f = \text{Norm}\, f_1\cdots\text{Norm}\, f_r$$
$$= g_1^{s_1}\cdots g_r^{s_r}$$

其中 $g_1,\cdots, g_r$ 是 $\mathbf{K}[z]$ 中的不可约多项式，且 $s_i > 0$. 于是，

$$g(z) = g_{i_1}\cdots g_{i_k}\in\mathbf{K}[z]$$

此处 $g_{i_1},\cdots, g_{i_k}$ 为 $g_1,\cdots, g_r$ 中不相同的那些 g_i. 因每一不可约的 f_i 是 $g_i^{s_i}$ 的因子，所以也是 g_i 与 $g(z)$ 的因子，而诸 f_i 彼此不同，故 f_i 的乘积 f 也是 $g(z)$ 的因子，且 $g(z)$ 无重因子. 证毕.

引理 3 有一机械方法使对任一在 $\mathbf{K}[z]$ 中无重因子的多项式 $g(z)\in\mathbf{K}[z]$，在有限步后获得一整数 s，使 $\text{Norm}\, g(z - s\theta)$ 在 $\mathbf{K}[z]$ 中无重因子.

证 对 $s = 1, 2,\cdots$ 命 $G_s = \text{Norm}\, g(z - s\theta)$. 作 G_s 的形式微分 G_s'，并应用辗转相除法求 G_s 与 G_s' 的最大公约式 D_s，则必有一 s 使 D_s 对 z 的次数为 0，即 G_s 无重因子而合于所求. 原因是在 $\mathbf{K}$ 的某一扩域 $\tilde{\mathbf{K}}$ 中，$g(z)$ 必分解成线性因子 $z - \beta_j$，且诸 β_j 彼此不同，于是 G_s 在某一扩域中将分解成线性因子 $z - (\beta_j + s\theta_i)$，而只有有限多个 s 能使 G_s 有重因子.

引理 4 设 $f(\theta, z)\in\mathbf{K}(\theta)[z]$ 无重因子，则有机械方法求得一整数 s，使 $\text{Norm}\,(f(\theta, z - s\theta))$ 在 $\mathbf{K}[z]$ 中无重因子.

证 依引理2，可应用机械方法求得一多项式 $g(z)\in\mathbf{K}[z]$，使 $g(z)$ 在 $\mathbf{K}[z]$ 中无重因子，而在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中以 $f(\theta, z)$ 为因子. 又依引理3，可应用机械方法求得一整数 s，使 $\text{Norm}\, g(z - s\theta)$ 在 $\mathbf{K}[z]$ 中无重因子. 此时 $g(z - s\theta)$ 在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中应以 $f(\theta, z - s\theta)$ 为因子. 因 $\text{Norm}\, g(z - s\theta)$ 无重因子，故 $\text{Norm}\,(f(\theta, z - s\theta))$ 也无重因子.

引理 5 设多项式 $h(\theta, z)\in\mathbf{K}(\theta)[z]$的范式 $\text{Norm}(h(\theta, z))$ 在 $\mathbf{K}[z]$ 中无重因子，且其在 $\mathbf{K}[z]$ 中的不可约因子分解为

$$\text{Norm}\, h = H_1(z)\cdots H_r(z)$$

则 $h(\theta, z)$ 在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中的不可约因子分解为

$$h = \prod_i \gcd(h(\theta, z), H_i(z))$$

这里 gcd 表示 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中的最大公约式，可用辗转相除法求得。

证 设 h 在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中的不可约因子分解为

$$h = h_1 \cdots h_s$$

则

$$\begin{aligned} \text{Norm } h &= \text{Norm } h_1 \cdots \text{Norm } h_s \\ &= H_1 \cdots H_r \end{aligned}$$

因每一 h_i 在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中不可约，故依引理 1，Norm h_i 为 $\mathbf{K}(z)$ 中一不可约多项式的乘幂，而由于 Norm h 无重因子，故 Norm h_i 本身必须为一不可约多项式且为 $H_1, \cdots, H_r$ 之一，最多相差一 $\mathbf{K}$ 中的非 0 因子。依同样理由这些不可约多项式 Norm h_i 必彼此不同，因此应有 $s = r$，且不妨直接设 Norm $h_1 = H_1, \cdots$, Norm$h_r = H_r$。显然，h 与 $H_i =$ Norm h_i 在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中有公因子 h_i，但不能再有其它 $h_j (j \neq i)$ 作为公因子。故 $\gcd(h, H_i) = h_i$，而引理得证。

定理 2 的证明如下（$\mathbf{A}$ 无限，$\mathbf{K} = \mathbf{A}$的商域）。

设所需分解因子的多项式为 $f(\theta, z) \in \mathbf{K}(\theta)[z]$。先用辗转相除法求得 $f(\theta, z)$ 与其形式微分 $f'(\theta, z)$ 在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$中的最大公约式 $d(\theta, z)$，则 $g(\theta, z) = f(\theta, z)/d(\theta, z)$ 在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中无重因子。依引理 4，可求得一整数 s，使 $h(\theta, z) = g(\theta, z - s\theta)$ 的范式 Norm h 在 $\mathbf{K}[z]$ 中无重因子。由假设已知$\mathbf{A}$中因子分解的机械方法，故由定理 1 可将 Norm h 在 $\mathbf{K}[z]$ 中分解成不可约因子：

$$\text{Norm } h = H_1(z) \cdots H_r(z)$$

用辗转相除法作 $H_i(z)$ 与 h 在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中的最大公约式

$$h_i(\theta, z) = \gcd(h(\theta, z), H_i(z))$$

则依引理 5，有 h 在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中的不可约因子分解：

$$h(\theta, z) = h_1(\theta, z) \cdots h_r(\theta, z)$$

于是 $g(\theta, z)$ 在 $\mathbf{K}(\theta)[z]$ 中有不可约因子分解：

$$g(\theta, z) = h(\theta, z + s\theta) = h_1(\theta, z + s\theta)\cdots h_r(\theta, z + s\theta)$$

由此可得所给多项式 $f(\theta, z) = g(\theta, z)d(\theta, z)$ 的不可约因子分解，只需再作若干次除法即可。

上面定理 1,2 都局限于**K**的有限扩域这种情形。如果不加任何限制，机械化的方法可能根本不存在，请参阅 Van der Waerden [4]。上面定理 1,2 中的机械化方法都源于 Kronecker，请参阅 Hermann [1]。显然这些方法的效率都不够高。近年来，计算机科学的发展使得人们发现了某些新方法。这些新方法用到了中国剩余定理与 p-adic 数理论等工具，可参阅 Berlekampf, Zassenhaus, P. S. Wang 等的著作，以及 Knuth 在《The Art of Computer Programming》vol. 2 一书中的有关部分。

4.3 多项式组的整序

第三章3.4节的例 5 指出，即使是 Pascal 几何中的一个交点定理，如果不表成构造型的形式，则它的假设部分在整理过程中就会出现高于一次的多项式，而不能使用 Hilbert 的机械化证明方法。如果不是交点定理或是它种几何中的定理，则一般说来假设部分中总会出现高于一次的多项式。以后将证明，对于这种情形，只需考虑定理的假设与终结都以多项式等于 0 的等式来表达，即所谓等式型定理，则仍然有机械化证法。参见本章 4.1 节。自然，这种机械化证法完全不同于 Hilbert 的那种机械化证法。如果施之于 Pascal 几何中的构造型交点定理，我们将得到两种不同的机械化证法。在给出并证明这种适用范围极广的机械化证法之前，本节以及下一节将先作一些准备工作。论述的主要根据是 Ritt 的 [1,2]两书，许多概念、方法和结果都出自 Ritt 的有关著作。

以下将考虑一个特征为 0 的基本数域，记作 **K**，两组变量

$$u_1, \cdots, u_e \text{ 与 } x_1, \cdots, x_N$$

排成次序

$$u_1 \prec u_2 \prec \cdots \prec u_e \prec x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_N$$

在 $\mathbf{K}$ 上的 $e+N$ 维线性空间 $\mathbf{K}^{e+N}$，其基与 $u_1, \cdots, u_e, x_1, \cdots, x_N$ 相当。

下面所说的多项式都是指系数在 $\mathbf{K}$ 中的 $u_1, \cdots, u_e, x_1, \cdots, x_N$ 的多项式，即 $\mathbf{K}[u_1, \cdots, u_e, x_1, \cdots, x_N]$ 中的元素，以后不再作说明。

对于一个单项式

$$\mu = a u_1^{i_1} \cdots u_e^{i_e} x_1^{m_1} \cdots x_N^{m_N} \qquad (a \in \mathbf{K})$$

有时也写成

$$\mu = a U^I X^M \qquad I = (i_1, \cdots, i_e) \qquad M = (m_1, \cdots, m_N)$$

或

$$\mu = a Z^{\alpha} \qquad \alpha = (I, M) = (i_1, \cdots, i_e, m_1, \cdots m_N)$$

若 $a \neq 0$，而 $(m_1, \cdots, m_N)$ 中最后一个不等于 0 的指数为 m_p，则称单项式 μ 的类为 p，否则称单项式 μ 的类为 0，此时 μ 中至多只有 u 而无 x。

两组非负整数

$$\alpha = (a_1, \cdots, a_s) \qquad \beta = (b_1, \cdots, b_s)$$

称为 α 在 β 之前或 β 在 α 之后，记作

$$\alpha \prec \beta \text{ 或 } \beta \succ \alpha$$

如果有一 k，使

$$a_{k+1} = b_{k+1}, \cdots, a_s = b_s \text{ 但 } a_k < b_k$$

对于两个非 0 单项式

$$\lambda = a u_1^{i_1} \cdots u_e^{i_e} x_1^{l_1} \cdots x_N^{l_N} \qquad a \neq 0$$

$$\mu = b u_1^{j_1} \cdots u_e^{j_e} x_1^{m_1} \cdots x_N^{m_N} \qquad b \neq 0$$

将称 λ 在 μ 之前或 μ 在 λ 之后，记作

$$\lambda \prec \mu \text{ 或 } \mu \succ \lambda$$

如果

$$(i_1, \cdots, i_e, l_1, \cdots, l_N) \prec (j_1, \cdots, j_l, m_1, \cdots, m_N)$$

任一非 0 多项式 F 可写成

$$F = a_1 Z^{\alpha_1} + a_2 Z^{\alpha_2} + \cdots + a_s Z^{\alpha_s}$$

其中

$$a_i \in \mathbf{K}$$

$$a_1 \neq 0, \cdots, a_s \neq 0$$

$$\alpha_1 \succ \alpha_2 \succ \cdots \succ \alpha_s$$

此时 $a_1 Z^{\alpha_1}$ 称为 F 的领式，Z^{α_1} 的类称为 F 的类。

若非 0 多项式 F 的类为 $p>0$，且 F 的领式 $a_1 Z^{\alpha_1}$ 中 x_p 的次数为 m，则 F 可写成

$$F = C_0 x_p^m + C_1 x_p^{m-1} + \cdots + C_m$$

其中诸 C 都是 u 与 $x_1, \cdots, x_{p-1}$ 的多项式，而不含 $x_p, x_{p+1}, \cdots, x_N$，且 $C_0 \neq 0$. 此时 C_0 称为 F 的初式。若 C_0 的领式为 c_0，则 F 的领式显为 $c_0 x_p^m$.

设两非 0 多项式 F 与 G. 如果 F 中 x_p 出现的最高次数小于 G 中 x_p 出现的最高次数，则称对 x_p 而言，F 比 G 有较低的秩或 G 比 F 有较高的秩。在不能比较高低时，称 F，G 对 x_p 同秩。

设两非 0 多项式 F 与 G，我们称 F 比 G 有较低的秩或 G 比 F 有较高的秩，记作

$$F \prec G \text{ 或 } G \succ F$$

如果以下两情形之一成立：

1. 类$(F)<$类(G).

2. 类$(F)=$类$(G)=p>0$，而 F 中 x_p 的次数小于 G 中 x_p 的次数，即对 x_p 而言，F 比 G 有较低的秩。

在 F 与 G 不能比较秩的高低时，将称 F 与 G 同秩，记作

$$F \sim G$$

例如，两个类都等于 0 的非 0 多项式同秩。

设多项式 F 的类为 $p>0$. 任一对 x_p 而言，秩低于 F 的多项式 G 都称为对 F 已约化的多项式。显然 F 的初式的类小于 p 且已对 F 约化。

设 F 的类为 $p>0$ 并写成形式

$$F = f_0 x_p^m + f_1 x_p^{m-1} + \cdots + f_m$$

其中

$$f_i \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_e, x_1, \cdots, x_{p-1}] \qquad f_0 \neq 0$$

任一对 F 未约化的非 0 多项式 G 可写成形式

$$G = g_0 x_p^M + g_1 x_p^{M-1} + \cdots + g_M$$

其中

$$g_i \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_e, x_1, \cdots, x_{p-1}, x_{p+1}, \cdots, x_N]$$

且

$$g_0 \neq 0 \qquad M \geqslant m$$

依据多项式的除法算法，以 F 除 G 得

$$f_0^s G = QF + R$$

这里 Q，R 都是多项式，R 中 x_p 的次数小于 m，所以对 F 来说已约化，而 s 为能有以上形式的最小非负整数，$s \leqslant M - m$。若 G 已对 F 约化，则可取 $s = 0$，$Q = 0$，$R = G$，而上式仍成立。不论何时，以上唯一确定的多项式 R 都称为 G 对 F 的**余式**，从 G 得 R 的步骤称为 G 对 F 的**约化**。

对我们说来特别重要的是 R，G 作为 x_p 的多项式时，R 中诸 x_p 幂次的系数都是 G 中诸 x_p 幂次系数的线性和，即

$$g_0 h_0 + \cdots + g_M h_M$$

这种形式，而和中各项的系数 $h_0, \cdots, h_M$ 则都是 F 中诸 x_p 幂次系数 $f_0, \cdots, f_m$ 的多项式，因而都是 $u_1, \cdots, u_e, x_1, \cdots, x_{p-1}$ 的多项式。在著者以后的有关书籍中，对机械化证明过程作计算复杂度的估计时，对此当作更为精确的描述。

下面考虑由有限个多项式，例如 A_i 所组成的多项式序列

$$\mathscr{A}: A_1, A_2, \cdots, A_r$$

这样的序列称为一**升列**，如果

$$r = 1 \text{ 且 } A_1 \neq 0$$

或

$$r > 1$$

$$0 < 类(A_1) < 类(A_2) < \cdots < 类(A_r)$$

且对任意 $j > i$，A_j 对 A_i 已约化。

显然对一升列而言，恒有 $r \leqslant N$。

升列 $\mathscr{A}$ 称为**矛盾**的，如果 $r = 1$，$A_1 \neq 0$，且类 $(A_1) = 0$。

设有两个升列$\mathscr{A}$与

$$\mathscr{B}: B_1, B_2, \cdots, B_s$$

称$\mathscr{A}$比$\mathscr{B}$有较高的秩或$\mathscr{B}$比$\mathscr{A}$有较低的秩，记作

$$\mathscr{A} \succ \mathscr{B} \text{ 或 } \mathscr{B} \prec \mathscr{A}$$

如果

有一 $j \leqslant \min(r, s)$ 使

$$A_1 \sim B_1, \cdots, A_{j-1} \sim B_{j-1}, \ A_j \succ B_j$$

或

$$s > r \text{ 且 } A_1 \sim B_1, \cdots, \ A_r \sim B_r$$

在两升列$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$不能比较秩的高低时，将称$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$同秩，记作

$$\mathscr{A} \sim \mathscr{B}$$

此时将有

$$r = s \text{ 且 } A_1 \sim B_1, \cdots, A_r \sim B_r$$

显然升列对秩的高低来说构成一个部分次序，因此对一个升列组成的集合可引入极小升列的概念，即集合中秩不高于其它任意升列的那种升列，如果存在的话。下面的引理是基本的，有着重要的作用。

引理 1 设

$$\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_q, \cdots$$

是升列 Φ_q 的一个非增秩的序列，即对任意 q 都有

$$\Phi_{q+1} \prec \Phi_q \text{ 或 } \Phi_{q+1} \sim \Phi_q$$

则必有一指数 q'，使对任意 $q > q'$，都有

$$\Phi_q \sim \Phi_{q'}$$

换言之，有 q' 使 $q \geqslant q'$ 时，Φ_q 都是序列中的极小升列。

证 记 Φ_q 中多项式的个数为 r_q，而第一项为 A_q，则

$$A_1, A_2, \cdots, A_q, \cdots$$

是一个多项式的非增秩序列，即对任意 q 都有

$$A_{q+1} \prec A_q \text{ 或 } A_{q+1} \sim A_q$$

由此知对任意 q 有类 $(A_{q+1}) \leqslant$ 类(A_q)，而在类$(A_{q+1}) =$ 类(A_q) $= p > 0$ 时，A_{q+1} 中 x_p 的次数应小于等于 A_q 中 x_p 的次数．因

类与次数都是非负整数，故必有 q_1 使 $q \geqslant q_1$ 时，所有 A_q 都将同秩.

若有 $q_1' \geqslant q_1$，使 $q \geqslant q_1'$ 时所有 $r_q = 1$，则引理已成立. 否则应有 $q_1' \geqslant q_1$，使 $q \geqslant q_1'$ 时都有 $r_q \geqslant 2$. 命这时 Φ_q 中的第二项为 $A_q^{(1)}$，于是

$$A_{q_1'}^{(1)}, A_{q_1'+1}^{(1)}, \cdots, A_q^{(1)}, \cdots$$

也是一多项式的非增秩序列. 同前，应有 $q_2 \geqslant q_1'$，使 $q \geqslant q_2 \geqslant q_1' \geqslant q_1$ 时，所有 $A_q^{(1)}$ 都同秩.

若所有 r_q 都小于等于 2，则引理已证明；否则应有 $q_2' \geqslant q_2$，使 $q \geqslant q_2'$ 时 r_q 都大于等于 3 而可取 Φ_q 中的第三项 $A_q^{(2)}$，以得一非增秩序列. 由于对任意 q 都有 $r_q \leqslant N$，故依次进行，最后必得一 r 与一 q'，使对任意 $q \geqslant q'$ 有 $r_q = r$，且对 Φ_q 中的各多项式都依次同秩，因而 Φ_q 都同秩. 如所欲证.

从这一引理可得下面的引理.

引理 1′ 如果一个升列的序列中各升列的秩逐步降低，则这一序列只有有限多个项.

设有一组非 0 多项式的非空集合 $\Sigma = \{F_\alpha\}$，一个多项式的升列 $\mathscr{A}$ 称为是**属于** Σ 的，如果 $\mathscr{A}$ 中的每一多项式都属于 Σ. 因为每一单独的 $F_\alpha \neq 0$ 都构成一个升列，故属于 Σ 的升列必然存在. 在所有属于 Σ 的升列所构成的集合中，任一极小升列都称为 Σ 的一个**基列**.

下面的引理指出了基列的存在并给出了构造性的作法.

引理 2 设 Σ 是一个由有限多个非 0 多项式所成的集合，则 Σ 必有基列，且有机械算法可在有限步内作出这样一个基列.

证 因假设 Σ 是有限集，故基列的存在颇为显然. 问题在于给出一个作基列的机械方法.

为此先在 $\Sigma = \Sigma_1$ 中找出有最低秩的多项式 A_1. 显然这可通过机械的方法找出. 若类 $(A_1) = 0$，则 A_1 即构成一基列. 设类$(A_1) > 0$，逐一检查 Σ_1 中除 A_1 以外的多项式对 A_1 是否已经约化. 若已不再有这样对 A_1 已约化的多项式，则 A_1 即已构成一基

列. 否则命 Σ_2 为 Σ_1 中除 A_1 以外已对 A_1 约化的多项式的集合. 由于 A_1 的选取在 Σ_2 中的多项式的类都大于 A_1 的类，今命 A_2 为 Σ_2 中有最低秩的多项式. 若 Σ_2 已不再有 A_2 以外对 A_2 已约化的多项式,则 A_1, A_2 即已构成 Σ 的一个基列. 否则可命 Σ_3 为 Σ_2 中除 A_2 以外已对 A_2 约化的多项式的集合，并在其中取一最低秩的多项式 A_3. 由于诸多项式 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 等的类将逐步增加,但不能大于 N, 故依此进行，在有限步后必将停止而得一基列. 如所欲证.

引理 3 设有限个非 0 多项式的集合 Σ 有一基列

$$\mathscr{A}: A_1, A_2, \cdots, A_r$$

且类$(A_1) > 0$, 又 B 是一对诸 A 都已约化的非 0 多项式. 命 Σ' 是将 B 添入 Σ 后的多项式集合,则 Σ' 的基列比 $\mathscr{A}$ 必有较低的秩.

证 若类 $(B) = 0$,则 B 构成 Σ' 的基列,而秩低于 $\mathscr{A}$. 今设类 $(B) = p > 0$, 因 B 对诸 A 已约化，故必有一 i, 使 $p >$ 类 (A_{i-1}), $p \leqslant$ 类 (A_i), 而在 $p =$ 类 (A_i)时, B 中 x_p 的次数小于 A_i 中 x_p 的次数. 于是

$$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}, B$$

为一属于 Σ' 的升列,且其秩低于 $\mathscr{A}$. 故 Σ' 的基列应有低于 $\mathscr{A}$ 的秩. 如所欲证.

附注 如果承认选择公理,则以上几个引理都可推广至多项式的任意无限集合,但这与本书的机械化思想不符,故以上引理的叙述都局限于有限集合或可数序列.

今设

$$\mathscr{A}: A_1, A_2, \cdots, A_r$$

是一升列,如前,而类 $(A_1) > 0$, 命类$(A_i) = p_i$, 又 A_i 的初式为 I_i, 则有

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_r$$

且对每一 i 有

类$(I_i) < p_i$

I_i 对 $A_1, \cdots, A_{i-1}$ 已约化.

设 B 是任一多项式，置 $B = R_r$. 可将 R_r 对 $\mathscr{A}$ 中自 A_r 起至 A_1 依次作余式 $R_{r-1}, \cdots, R_0$, 得 $(s_i \geqslant 0)$:

$$I_r^{s_r} R_r = Q_r A_r + R_{r-1}$$
$$I_{r-1}^{s_{r-1}} R_{r-1} = Q_{r-1} A_{r-1} + R_{r-2}$$
$$\cdots$$
$$I_1^{s_1} R_1 = Q_1 A_1 + R_0$$

置 $R_0 = R$, 即得

$$I_1^{s_1} \cdots I_r^{s_r} B = Q_1' A_1 + \cdots + Q_r' A_r + R$$

其中诸 Q' 都是多项式. 这里 R 由 B 与升列 $\mathscr{A}$ 所唯一确定. 我们称 R 为 B 对升列 $\mathscr{A}$ 的余式. 最后所得公式则称为余式公式.

由前面关于求余式时的附注可知，R 中任意一项，x_{p_i} 的次数都小于 A_i 中 x_{p_i} 的次数，即 R 对 $\mathscr{A}$ 中的每一多项式 A_i 都已约化. 我们简称 R 对 $\mathscr{A}$ 已约化，并称从 B 与 $\mathscr{A}$ 得余式 R 为 B 对 $\mathscr{A}$ 的约化. 由于求一多项式对另一多项式的余式可机械地依据除法算法进行，故有下面的引理.

引理 4 设多项式 B 与升列 $\mathscr{A}$，其中第一项的类大于 0，则有一算法可在有限步后求得 B 对 $\mathscr{A}$ 的余式 R. 记 $\mathscr{A}$ 中第 i 项为 A_i，其类为 p_i，则余式 R 中任意一项的 x_{p_i} 的次数都小于 A_i 中 x_{p_i} 的次数.

在引进了有关多项式的许多概念，如类、秩、初式、领式、约化、余式、升列、基列等等，并证明了若干简单引理之后，我们将进入本节的主题: 多项式组的零点概念与整序方法.

为此，试考虑任一多项式 F. 设数域 $\mathbf{K}$ 中有一组数

$$u_1^0, \cdots, u_e^0, x_1^0, \cdots, x_N^0$$

以之代入 F 中的 $u_1, \cdots, u_e, x_1, \cdots, x_N$ 后使 $F = 0$，则这一组数作为线性空间 $\mathbf{K}^{e+N}$ 中的一个点时，称为 F 的一个零点或方程 $F = 0$ 的一个解，若诸 u^0, x^0 都是 $\mathbf{K}$ 的某一扩域 $\tilde{\mathbf{K}}$ 中的数，而代入 F 仍能使 $F = 0$，则这一组数作为 $\tilde{\mathbf{K}}$ 上线性空间 $\tilde{\mathbf{K}}^{e+N}$ 中的点时，称为 F 的一个扩充零点，或方程 $F = 0$ 的一个扩充解. 若需指明特殊的扩域 $\tilde{\mathbf{K}}$，则称为 F 的 $\tilde{\mathbf{K}}$ 零点或 $F = 0$ 的 $\mathbf{K}$ 解.

设一多项式的集合 Σ，若上述数组是 Σ 中每一多项式 F 的零点(或扩充零点,$\tilde{\mathbf{K}}$零点),则该数组作为一个点,称为 Σ 的一个零点(或扩充零点$\tilde{\mathbf{K}}$零点),或方程组 $F=0$，$F\in\Sigma$ 的解,简称为 $\Sigma=0$ 的解(或扩充解,$\mathbf{K}$解).

今设一由有限多个非 0 多项式所组成的集合 $\Sigma=\Sigma_1$，依引理 2，Σ_1 有一基列 Φ_1. 若 Φ_1 为矛盾列，即 Φ_1 只有一项 A_1，其类为 0 时，A_1 属于 Σ_1. 设 Φ_1 为非矛盾列，即 Φ_1 的第一项的类大于0. 今对 Σ_1 中有在 Φ_1 以外的多项式 B 作 B 对 Φ_1 的余式 R_B. 若有非 0 的 R_B，则添入 Σ_1 得一非 0 多项式的有限集合 Σ_2. 由余式公式每一 R_B 都是 Φ_1 中的多项式与 B 的线性和，和中每一项的系数都是多项式，因而 Σ_2 与 Σ_1 有相同的零点集，也有相同的扩充零点集与任意扩域$\tilde{\mathbf{K}}$的$\tilde{\mathbf{K}}$零点集. 今依引理 3，Σ_2 的基列 Φ_2 的秩将低于 Φ_1. 若 Φ_2 是矛盾列，则 Φ_2 只有一项 A_2，其类为 0. 此时由作法A_2 属于 Σ_2，而为 Σ_1 中多项式的线性和，和中各项的系数都是多项式. 若 Φ_2 非矛盾列，则可如前继续进行. 于是或则在有限步后得一矛盾列，或则得一组有限集

$$\Sigma_1\subset\Sigma_2\subset\cdots\subset\Sigma_q\subset\cdots$$

诸集 Σ_i 都有相同的零点集(扩充零点集，$\tilde{\mathbf{K}}$零点集)，且其相应的非矛盾基列 Φ_i 的秩逐步降低:

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\cdots\Phi_q,\cdots$$

由引理 1，这样的序列只能有有限多个项. 换言之，若最后一个多项式的有限集为 Σ_q，而 Φ_q 为其相应的基列，则 Σ_q 中任一在 Φ_q外的多项式对 Φ_q 的余式都是 0.

今设 Φ_q 为

$$\Phi_q: F_1,\ F_2,\cdots,\ F_r$$

其中每一 F_i 或本来属于 Φ_{q-1}，或为 Σ_{q-1} 中某一多项式对 Φ_{q-1}的非 0 余式，因而依余式公式是 Φ_{q-1} 中多项式的线性和，和中每项的系数都是多项式. 由此知 Σ_{q-1} 的任一零点，因而 Σ 的任一零点都是 Φ_q 的零点.

另一方面，命 Φ_q 中各项的初式为 $I_1,\cdots,I_s$. 由作法知对 Σ_q

中任意多项式 G，都有非负整数 $s_i \geqslant 0$，使

$$I_1^{s_1}\cdots I_r^{s_r}G = Q_1F_1 + \cdots + Q_rF_r$$

所以任一 Φ_q 的零点只需不使任一初式 $I_1,\cdots I_r$ 为 0，即也是 Σ_q 的零点，因而也是 $\Sigma = \Sigma_1$ 的零点．显然这对扩充零点或 $\tilde{\mathbf{K}}$ 零点说来也是如此．

简记 Φ_q 为 Φ，综合上述即得下面的定理．

定理 有一算法使对任一有限多个非 0 多项式所成的集合 Σ，在机械地进行有限步之后，或得一类为 0，即只有 $u_1,\cdots,u_e$ 的非 0 多项式 A，使 Σ 的任一零点也是 A 的零点，或得一非矛盾升列

$$\Phi: F_1,\cdots, F_r$$

以 $I_1,\cdots,I_r$ 为初式，使 Σ 的零点都是 Φ 的零点，且 Φ 的零点只需不使任一初式 $I_i = 0$，即也是 Σ 的零点．对于扩充零点或 $\tilde{\mathbf{K}}$ 零点也是如此．

我们将称从 Σ 到 Φ 的这一机械方法为 Σ 的整序，并称上述定理为整序定理．

4.4 代数簇的构造性理论
——不可约升列与不可约代数簇

我们将沿用上节的符号，以 $\mathbf{K}$ 表示特征为 0 的基本数域，以

$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_N$$

表示排成一定次序的变量，而略去变量 $u_1,\cdots,u_e$．所谓多项式，若非另有说明，将指系数在 $\mathbf{K}$ 中的 $x_1,\cdots,x_N$ 的多项式，即 $\mathbf{K}[x_1,\cdots,x_N]$ 中的元素．

有限多个非 0 多项式所成的集合简称为多项式组．将两个多项式组 Σ_1 与 Σ_2 中的多项式合在一起所得的多项式组简记为 $\Sigma_1 + \Sigma_2$．对于任意多项式 F, G 等，$\Sigma + \{F\}$ 简记为 $\Sigma + F$，$\Sigma + \{F, G\}$ 简记为 $\Sigma + F + G$，其余类推．

任一多项式组 Σ 定义了一个代数簇，记为 $|\Sigma|$，以 Σ 为其定义集．设两个多项式组 Σ_1 与 Σ_2，如果 Σ_1 的任一扩充零点也是 Σ_2 的

扩充零点，则称 Σ_1 所定义的代数簇为 Σ_2 所定义代数簇的子簇，记作

$$\Sigma_2 = 0 | \Sigma_1 \text{ 或 } |\Sigma_1| \subset |\Sigma_2|$$

若又有 $|\Sigma_2| \subset |\Sigma_1|$，即 Σ_1，Σ_2 有相同的扩充零点，则称 Σ_1 与 Σ_2 等价，记作

$$\Sigma_1 \approx \Sigma_2 \text{ 或 } |\Sigma_1| = |\Sigma_2|$$

若 $|\Sigma_1| \subset |\Sigma_2|$ 但 $|\Sigma_1| \neq |\Sigma_2|$，即

$$|\Sigma_1| \subsetneqq |\Sigma_2|$$

则称 Σ_1 所定义的代数簇为 Σ_2 所定义代数簇的真子簇.

设多项式 F，如果多项式组 Σ 的任一扩充零点都是 F 的扩充零点，即

$$\{F\} = 0 | \Sigma \text{ 或 } |\Sigma| \subset |\{F\}|$$

则称 F 在 Σ 上等于 0，简记为

$$F = 0 | \Sigma$$

否则记作

$$F \neq 0 | \Sigma$$

设 $k+1$ 个多项式组 Σ，$\Sigma_1, \cdots, \Sigma_k$ $(k > 1)$ 之间有以下性质：Σ 的任一扩充零点至少都是 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_k$ 中某一个 Σ_i 的扩充零点，而每一 Σ_i 的任一扩充零点都是 Σ 的扩充零点，则称 $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_k$ 是 Σ 的一个分解，或代数簇 $|\Sigma_1|, \cdots, |\Sigma_k|$ 是 $|\Sigma|$ 的一个分解，记作

$$|\Sigma| = |\Sigma_1| \cup \cdots \cup |\Sigma_k| \qquad (k > 1)$$

如果对任意 i，$|\Sigma_i|$ 与 $|\Sigma_j|$ 的和 $(j \neq i)$ 间都无 $\subset$ 关系，则称这样的分解是不可缩的. 这时每一 Σ_i 所定义的代数簇都是 Σ 所定义代数簇的真子簇，但不是任意其它 Σ_j 的子簇.

如果多项式组 Σ 有不可缩的分解，则 Σ 可约，Σ 所定义的代数簇为可约簇. 对于相反的情形称 Σ 为不可约的，所定义的代数簇为不可约簇. 如果上述不可缩分解中每一 Σ_i 都是不可约的，则称这一分解为 Σ 或 Σ 所定义代数簇的不可约分解，每一 Σ_i 或其所定义的代数簇为 Σ 或其代数簇的一个不可约成份.

本节将考虑代数簇或多项式组可约与否的问题，而在下节将考虑代数簇不可约分解的问题. 下面是一个简单的代数簇不可约判定.

引理 1 多项式组 Σ 不可约的充要条件是不可能有两非 0 多项式 G 与 H,使

$$GH = 0|\Sigma$$

但

$$G \neq 0|\Sigma \qquad H \neq 0|\Sigma$$

证 若有 G, H 满足以上诸条件,则显有分解

$$|\Sigma| = |\Sigma + G| \cup |\Sigma + H|$$

且这一分解是不可缩的,故 Σ 可约.

反之,设 Σ 可约,而

$$|\Sigma| = |\Sigma_1| \cup |\Sigma_2|$$

是 Σ 的一个不可缩分解,则在 Σ_1 中必有一多项式 F_1, 使 $F_1 \neq 0|\Sigma_2$,因此 $F_1 \neq 0|\Sigma$. 同样在 Σ_2 中也有多项式 F_2, 使 $F_2 \neq 0|\Sigma_1$, 因此 $F_2 \neq 0|\Sigma$. 但任一 Σ 的扩充零点必是 Σ_1 或 Σ_2 的扩充零点, 因而是 F_1 或 F_2 的扩充零点. 因之不论何时, 任一 Σ 的扩充零点都是乘积 F_1F_2 的扩充零点,或 $F_1F_2 = 0|\Sigma$. 于是 $G = F_1$, $H = F_2$ 即合引理中的条件. 证毕.

我们将给出一个多项式组 Σ 或其所定义的代数簇 $|\Sigma|$ 为不可约的另一个判定. 为此先引进若干概念如次.

试考虑 $\mathbf{K}$ 的任两扩域 $\tilde{\mathbf{K}}$ 与 $\mathbf{K}'$,并设 $\tilde{\mathbf{K}}$ 上与 $\mathbf{K}'$ 上线性空间 $\tilde{\mathbf{K}}^N$ 与 $\mathbf{K}'^N$ 中的两个点 $\xi = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_N)$, $\tilde{x}_i \in \tilde{\mathbf{K}}$; $\xi' = (x'_1, \cdots, x'_N)$, $x'_i \in \mathbf{K}'$. 假设这两点具有以下性质:

对于任一 $\mathbf{K}[x_1, \cdots, x_N]$ 中的多项式 $F(x_1, \cdots, x_N)$ 有

ξ 是 F 的扩充零点 $\Rightarrow$ ξ' 是 F 的扩充零点. 换言之, 只需 $F(\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_N) = 0$,即有 $F(x'_1, \cdots, x'_N) = 0$.

这时 ξ 称为 ξ' 对 $\mathbf{K}$ 的一个**母点**, 或 ξ' 是 ξ 对 $\mathbf{K}$ 的一个**子点**, 或 ξ' 是 ξ 对 $\mathbf{K}$ 的一个**特定化**. 在不致引起误解时,"对 $\mathbf{K}$"两字将略去.

今设多项式组Σ有一扩充零点$\tilde{\xi}$，使Σ的任一扩充零点都是$\tilde{\xi}$对$\mathbf{K}$的子点，则称$\tilde{\xi}$是多项式组Σ或其所定义代数簇$|\Sigma|$的一个母点.

下面是多项式组或代数簇的又一不可约判定.

引理 2 多项式组Σ或其所定义代数簇$|\Sigma|$不可约的充要条件是Σ有母点.

证 先设Σ有母点$\tilde{\xi}=(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_N)$，其中$\tilde{x}_i$属于$\mathbf{K}$的某一扩域$\tilde{\mathbf{K}}$. 今设$G$, H是任两$\mathbf{K}[x_1,\cdots,x_N]$中的多项式，使$GH=0|\Sigma$. 于是$G(\tilde{\xi})H(\tilde{\xi})=0$，因而$G(\tilde{\xi})=0$或$H(\tilde{\xi})=0$. 设$G(\tilde{\xi})=0$，则由于$\tilde{\xi}$是$\Sigma$的母点，故对$\Sigma$的任一扩充零点$\xi'$都有$G(\xi')=0$，即$G=0|\Sigma$. 同样在$H(\tilde{\xi})=0$时有$H=0|\Sigma$. 故由引理1知$\Sigma$不可约.

其次设Σ不可约. 我们将作出一Σ的母点如次.

对任两多项式F, G，若有

$$F-G=0|\Sigma$$

则称F, G对Σ等价，记作

$$F\sim G(\Sigma)$$

于是多项式可分成等价类. 显然，若

$$F_1\sim G_1 \qquad F_2\sim G_2(\Sigma)$$

即有

$$F_1\pm F_2\sim G_1\pm G_2(\Sigma)$$

$$F_1F_2\sim G_1G_2(\Sigma)$$

故对Σ的等价类可进行加、减与乘的运算. 称含多项式0的等价类为零类，记作θ. 又记多项式1的等价类为ω. 任一$\mathbf{K}$中的元素a可恒同为一等价类$a\omega$. 由于假设Σ为不可约的，故依引理1，任两等价类α, β都不等于零类θ时，$\alpha\beta$也不等于θ. 事实上，这些等价类构成一个整环，以ω为其么元素，记为R_Σ.

今考虑R_Σ的商域，换言之，即所有$\beta\neq\theta$的等价类偶或简称偶(α,β)在等价关系

$$(\alpha,\beta)\sim(\gamma,\delta)\Longleftrightarrow\alpha\delta=\beta\gamma$$

下的等价类的全体，其中加、减、乘、除等运算都可自然地定义．特别有 $(\gamma, \delta) \nsim (\theta, \omega)$ 时，

$$(\alpha, \beta)/(\gamma, \delta) \sim (\alpha\delta, \beta\gamma)$$

将$\mathbf{K}$中任一元素 a 恒同为偶 $(a\omega, \omega)$ 的等价类，则这一商域可视为$\mathbf{K}$的一个扩域．我们记这一扩域为 $\tilde{\mathbf{K}}_\Sigma$．又 R_Σ 中任一元素 α 也将恒同为 $\tilde{\mathbf{K}}_\Sigma$ 中偶 (α, ω) 的等价类．

今命多项式 x_i 在 R_Σ 中所定义的等价类为 ξ_i．又命偶(ξ_i, ω)在 $\tilde{\mathbf{K}}_\Sigma$ 所定的等价类仍记为 ξ_i．于是 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N)$为 $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_\Sigma$ 上线性空间 $\tilde{\mathbf{K}}^N$ 上的一个点．下面证明 ξ 是 Σ 的一个母点．

首先对任一 Σ 中的多项式 $F = F(x_1, \cdots, x_N)$ 有 $F = 0|\Sigma$，故 F 在 R_Σ 中的等价类 $\varphi = \theta$．显然在 R_Σ 中，因而也在 $\tilde{\mathbf{K}}_\Sigma$ 中有 $\varphi = F(\xi_1, \cdots, \xi_N)$，故 ξ 是 $F \in \tilde{\mathbf{K}}[x_1, \cdots, x_N]$ 的一个扩充零点．因 F 是 Σ 中的任意多项式，故 ξ 是 Σ 的一个扩充零点．

今设 $G = G(x_1, \cdots, x_N)$ 为 $\mathbf{K}[x_1, \cdots, x_N]$ 中任一多项式而以 ξ 为扩充零点，即 $G(\xi_1, \cdots, \xi_N) = \theta$，则 $G(x_1, \cdots, x_N)$属于零类 θ，即 $G = 0|\Sigma$．故对 Σ 的任一扩充零点 ξ' 有 $G(\xi') = 0$，即

$$G(\xi) = 0 \Rightarrow G(\xi') = 0$$

因 G 任意，故任一 Σ 的扩充零点 ξ' 都是 ξ 的子点．由此知 ξ 是 Σ 的一个母点．如所欲证．

以上两引理虽都给出了一个多项式组不可约的充要条件，但这些判定都不是构造性的而是抽象存在性的．给定一多项式组 Σ 后，仅凭这两条引理并不能提供可以在有限步后确定是否有多项式 G, H 满足引理 1 中的条件或是否有一扩域 $\tilde{\mathbf{K}}$ 以及 $\tilde{\mathbf{K}}^N$ 中的一点 ξ 作为 Σ 的母点的方法．为了本书主旨——机械化证明的需要，必须有一种机械的方法，足以在有限步之后确定任一多项式组是否不可约，而在可约时，又足以在有限步之后给出不可约分解的各个不可约成份来．本节以及以下几节，我们将给出这样的机械方法，由此建立代数几何的**构造性理论**．

考虑一升列

$$\Phi: A_1, A_2, \cdots, A_n$$

其中 A_i 的类为 p_i,而

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n$$

我们将符号 x 改为 y 与 u, 记为

$$x_{p_1} = y_1, \cdots, x_{p_n} = y_n$$

而以其余诸 x 依原来次序记作 $u_1, \cdots, u_d$. 这里 $d = N - n$ 称为升列 Φ 的维数,记作

$$d = \dim \Phi$$

这时 Φ 中诸多项式 A_i 可写成以下形式:

$$\Phi: \begin{cases} A_1 = C_{10}y_1^{m_1} + C_{11}y_1^{m_1-1} + \cdots + C_{1m_1} \\ A_2 = C_{20}y_2^{m_2} + C_{21}y_2^{m_2-1} + \cdots + C_{2m_2} \\ \cdots \\ A_n = C_{n0}y_n^{m_n} + C_{n1}y_n^{m_n-1} + \cdots + C_{nm_n} \end{cases}$$

其中诸 $C_{i0} \neq 0$ 即 A_i 的初式. 又每一 C_{ij} 都是以 $\mathbf{K}$ 为系数仅有 $u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{i-1}$ 的多项式, 且 A_i 对 $A_1, \cdots, A_{i-1}$ 都已约化,因而 C_{ij} 中 $y_1, \cdots, y_{i-1}$ 的次数各小于 $m_1, \cdots m_{i-1}$. 我们首先需要解决的问题是给出 Φ 可作为一不可约多项式组的基列的条件.

为此设升列 Φ 有以下性质:

记 $\mathbf{K}$ 添入 $u_1, \cdots, u_d$ 后的超越扩域 $\mathbf{K}(u_1, \cdots, u_d)$ 为 $\mathbf{K}_0$, 则 A_1 在 $\mathbf{K}_0[y_1]$ 中不可约.

记 $\mathbf{K}_0$ 添入 $A_1 = 0$ 的一个扩充零点 η_1 后所得的代数扩域为 $\mathbf{K}_0(\eta_1) = \mathbf{K}_1$, 则 A_2 在以 η_1 代 y_1 后所得的多项式 $\tilde{A}_2$ 在 $\mathbf{K}_1[y_2]$ 中不可约.

记 $\mathbf{K}_1$ 添入 $\tilde{A}_2 = 0$ 的一个扩充零点 η_2 后所得的代数扩域为 $\mathbf{K}_1(\eta_2) = \mathbf{K}_2$, 则 A_3 在以 η_1 代 y_1, η_2 代 y_2 后所得多项式 $\tilde{A}_3$ 在 $\mathbf{K}_2[y_3]$ 中不可约.

假设按上述方式依次进行, 可以逐次得代数扩域 $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{i-1}(\eta_i)$,以 $\eta_1, \cdots, \eta_{i-1}$ 代 A_i 中 $y_1, \cdots y_{i-1}$ 所得在 $\mathbf{K}_{i-1}[y_i]$ 中不可约的多项式 $\tilde{A}_i$, 以及 $\tilde{A}_i = 0$ 的一个扩充零点 η_i; $i = 1, 2, \cdots, n$.

在以上这些假设下，称升列Φ**不可约**. 由本章第2节可知，依据一机械方法在有限步后可确定Φ是否不可约.

设Φ不可约而满足以上条件，则u_i，η_j都是$\tilde{\mathbf{K}}=\mathbf{K}_n$中的数，而数组$\tilde{\eta}=(u_1,\cdots,u_d,\eta_1,\cdots,\eta_n)$可视为$\tilde{\mathbf{K}}^{d+n}=\tilde{\mathbf{K}}^N$中的一个点，称之为$\Phi$的一个**母点**，$\tilde{\mathbf{K}}$称为$\Phi$的一个**母域**.

下面的引理是颇为重要的.

引理 3 若升列Φ不可约，

$$\tilde{\eta}=(u_1,\cdots,u_d,\eta_1,\cdots,\eta_n)$$

为Φ的一个母点，则任一多项式$F\in\mathbf{K}[u_1,\cdots,u_d,y_1,\cdots,y_n]$对$\Phi$的余式$R$恒等于0的充要条件为：$\tilde{\eta}$是$F$的一个扩充零点.

证 记Φ中首k个多项式所成升列为

$$\Phi_k: A_1, A_2, \cdots, A_k \qquad (1\leqslant k\leqslant n)$$

又记$\mathbf{K}^{d+k}$为$\mathbf{K}$上基与$u_1,\cdots u_d,y_1,\cdots,y_k$相当的$d+k$维线性空间，其余类推，则$\Phi_k$不可约，且

$$\tilde{\eta}_k=(u_1,\cdots,u_d,\eta_1,\cdots,\eta_k)$$

作为$\mathbf{K}_k^{d+k}$中的一个点时是Φ_k的一个母点，$\mathbf{K}_k$为Φ_k的母域.

我们采用对k的归纳证明以下两个断言：

1°_k $\tilde{\eta}_{k-1}$不是$C_{k,0}$的扩充零点.

2°_k 若$R_k\in\mathbf{K}[u_1,\cdots,u_d,y_1,\cdots,y_k]$对$\Phi_k$已约化，而$\tilde{\eta}_k$是$R_k$的扩充零点，则$R_k$恒等于0.

由于$C_{k+1,0}\in\mathbf{K}[u_1,\cdots,u_d,y_1,\cdots,y_k]$对$\Phi_k$已约化且不等于0，故$1^\circ_{k+1}$可从$2^\circ_k$得出.

今设2°_{k-1}成立，而R_k符合2°_k中的条件. 将R_k写成y_k的多项式

$$R_k=S_0y_k^r+S_1y_k^{r-1}+\cdots+S_r$$

其中$S_i\in\mathbf{K}[u_1,\cdots,u_d,y_1,\cdots,y_{k-1}]$而$r<m_k$. 将$S_i$中的$y_1,\cdots,y_{k-1}$代以$\eta_1,\cdots,\eta_{k-1}$，记所得为$\tilde{S}_i\in\mathbf{K}_{k-1}$. 记

$$\tilde{R}_k=\tilde{S}_0y_k^r+\tilde{S}_1y_k^{r-1}+\cdots+\tilde{S}_r\in\mathbf{K}_{k-1}[y_k]$$

则由假设，η_k是$\tilde{R}_k=0$的扩充解. 由于$r<m_k$而η_k是$\mathbf{K}_{k-1}$中不可约多项式$\tilde{A}_k$的扩充零点，故$\tilde{R}_k$必须恒等于0而有$\tilde{S}_0=0$，

$\cdots,\tilde{S}_r = 0$. 由于 R_k 已对 Φ_k 约化，故每一 S_i 都已对 Φ_{k-1} 约化，因而依归纳假设 2°_{k-1} 知 $S_i = 0$，$R_k = 0$，即 2°_k 成立，因此 1°_{k+1} 也成立. 由于这一证明也适用于 2°_1，而 1°_1 甚显然，故 1°_k，2°_k 已完全证明，$k = 1,\cdots,n$.

至此易证引理 3 如次. 设 F 对 $\Phi_n = \Phi$ 的余式为 R，则依余式公式有 $s_i \geqslant 0$ 与多项式 Q_i，使

$$C_{10}^{s_1}\cdots C_{n0}^{s_n}F = Q_1A_1 + \cdots + Q_nA_n + R$$

若 $R = 0$，则因 $\tilde{\eta}$ 是诸 A_k 的扩充零点，但依 1°_k 非 C_{k0} 的扩充零点，故由上式 $\tilde{\eta}$ 必为 F 的扩充零点. 反之若 $\tilde{\eta}$ 是 F 的扩充零点，则仍由上式 $\tilde{\eta}$ 是 R 的扩充零点而由 2°_n 应有 $R = 0$. 证毕.

引理 4 如前，设不可约升列

$$\Phi: A_1, A_2, \cdots, A_n$$

与母点

$$\tilde{\eta} = (u_1, \cdots, u_d, \eta_1, \cdots, \eta_n)$$

若多项式 $F \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_n]$ 对 Φ 的余式不等于 0，则在 $\mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_n]$ 中必有多项式 G 与 Q_i，$i = 1, \cdots, n$，使

$$GF - (Q_1A_1 + \cdots + Q_nA_n) \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d]$$

且使

$$G(\tilde{\eta}) \neq 0$$

证 我们采用对 k 的归纳证明下述论断 (T_k)，引理本身则相当于 $k = n$ 的情形.

(T_k) 设 $F_k \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_k]$ 对

$$\Phi_k: A_1, A_2, \cdots, A_k$$

的余式不等于 0，则必有 G_k，Q_{ki}，$i = 1, \cdots, k$，$\in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_k]$，使

$$G_kF_k - (Q_{k1}A_1 + \cdots + Q_{kk}A_k) \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d]$$

且使

$$G_k(\tilde{\eta}_k) \neq 0$$

对于 $k = 0$ 的情形是不足道的. 今设 $k < n$ 而 (T_k) 已成立，

试证 (T_{k+1}) 如次.

由于 A_{k+1} 的初式 I_{k+1} 显然合于 (T_k) 的条件，故由归纳假设有 $H_k, R_{k1}, \cdots, R_{kk} \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_k]$ 使

$$H_k I_{k+1} - (R_{k1}A_1 + \cdots + R_{kk}A_k) \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d]$$

且使

$$H_k(\tilde{\eta}_k) = H_k(\tilde{\eta}_{k+1}) \neq 0$$

今设 $F_{k+1} \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{k+1}]$ 对 Φ_{k+1} 的余式不等于 0，因此由引理 3 $F_{k+1}(\tilde{\eta}_{k+1}) \neq 0$。今将 F_{k+1} 与 A_{k+1} 作为 y_{k+1} 的多项式对 y_{k+1} 作结式，即得多项式 U_{k+1}, $V_{k+1} \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{k+1}]$ 与 $F_k \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_k]$，使

$$U_{k+1}F_{k+1} + V_{k+1}A_{k+1} = F_k \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_k]$$

其中 U_{k+1} 对 y_{k+1} 的次数小于 A_{k+1} 对 y_{k+1} 的次数 m_{k+1}，V_{k+1} 对 y_{k+1} 的次数小于 F_{k+1} 对 y_{k+1} 的次数. 命以 $\eta_1, \cdots, \eta_k$ 代 $y_1, \cdots, y_k$ 时，从 U_{k+1} 等所得 y_{k+1} 的多项式为 $\tilde{U}_{k+1}$ 等 $\in \mathbf{K}_k[y_{k+1}]$，则从上式得

$$\tilde{U}_{k+1}\tilde{F}_{k+1} + \tilde{V}_{k+1}\tilde{A}_{k+1} = \tilde{F}_k$$

由于 $\tilde{A}_{k+1}$ 为 $\mathbf{K}_k[y_{k+1}]$ 中的不可约多项式，而 $\tilde{A}_{k+1}(\eta_{k+1}) = 0$，$\tilde{F}_{k+1}(\eta_{k+1}) = F_{k+1}(\tilde{\eta}_{k+1}) \neq 0$，故 $\tilde{F}_{k+1}$ 与 $\tilde{A}_{k+1}$ 不能有 y_{k+1} 的公共因子，而有 $\tilde{F}_k \neq 0$，或 $F_k(\tilde{\eta}_k) = F_k(\tilde{\eta}_{k+1}) \neq 0$. 因 $A_{k+1}(\tilde{\eta}_{k+1}) = 0$，因而 $U_{k+1}(\tilde{\eta}_{k+1}) \neq 0$。

从 $F_k(\tilde{\eta}_k) \neq 0$ 依据引理 3 知，F_k 对 Φ_k 的余式不等于 0. 因而由归纳假设有 G_k, $Q_{k1}, \cdots, Q_{kk} \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_k, y_1, \cdots, y_k]$ 满足 (T_k) 中的关系式:

$$G_k F_k - (Q_{k1}A_1 + \cdots + Q_{kk}A_k) \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_k]$$

且

$$G_k(\tilde{\eta}_k) = G_k(\tilde{\eta}_{k+1}) \neq 0$$

今置

$$G_{k+1} = G_k U_{k+1}$$
$$Q_{k+1,1} = Q_{k1}, \cdots, Q_{k+1,k} = Q_{k,k}$$
$$Q_{k+1,k+1} = -G_k V_{k+1}$$

则有

$$G_{k+1}, Q_{k+1,1}, \cdots, Q_{k+1,k+1} \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{k+1}]$$

$$G_{k+1}F_{k+1} - (Q_{k+1,1}A_1 + \cdots + Q_{k+1,k+1}A_{k+1}) \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d]$$

以及

$$G_{k+1}(\tilde{\eta}_{k+1}) = G_k(\tilde{\eta}_k)U_{k+1}(\tilde{\eta}_{k+1}) \neq 0$$

故 (T_{k+1}) 成立而引理得证.

设不可约升列 Φ 如前. 命 Ω 为所有 $K[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_n]$ 中对 Φ 的余式为 0 的多项式的集合. 依据引理 3，这一集合显然成一模 (module). 由 Hilbert 有限基定理，在 Ω 中必可选取有限多个多项式，使 Ω 的任一其它多项式都是这有限多个多项式的线性和，和式中每一项的系数都是多项式. 我们不妨把 Φ 中的 $A_1, \cdots, A_n$ 都加入这些有限多个多项式中，并记其所构成的多项式组为 Ω_Φ. 由于引理 3，这一多项式组显然以 Φ 为它的一个基列，又以 $\tilde{\eta}$ 为它的一个扩充零点. 今设有一多项式 G 以 $\tilde{\eta}$ 为它的一个扩充零点，则据引理 3 G 对 Φ 的余式为 0，故由 Ω_Φ 的作法 G 可表为 Ω_Φ 中多项式的线性和，因而 $G = 0 | \Omega_\Phi$. 由此知 Ω_Φ 的任一扩充零点都是 $\tilde{\eta}$ 的子点，因而 Ω_Φ 是一不可约多项式组，且以 $\tilde{\eta}$ 为它的一个母点.

这一从不可约升列 Φ 获得不可约多项式组 Ω_Φ 的证明是根据 Hilbert 的有限基定理. 由于 Ω 是一个超穷集合，因而证明须依赖选择公理，且只能证明 Ω_Φ 的存在. 但实际上我们可用一机械方法把这样一个由有限多个多项式所组成的组 Ω_Φ 在有限步内具体地构造出来. 换言之，有下面的定理.

定理 有一机械方法使对任一不可约升列 Φ 可在有限步后作出一由有限多个包括 Φ 中多项式在内的不可约多项式组 Ω_Φ，使 Ω_Φ 以 Φ 为基列，并以 Φ 的母点为 Ω_Φ 的母点.

这一定理的证明并不简单. 由于在本书以后的应用中只需知道 Ω_Φ 的存在，而这已由存在性的 Hilbert 有限基定理作为保证，故我们只进行这一定理的叙述，而将证明略去.

4.5 代数簇的构造性理论——代数簇的不可约分解

本节将提出一个机械方法，使得在有限步内将任一多项式组分解成不可约多项式组.

我们沿用上节的符号，以$\mathbf{K}$表示基本数域，$x_1 \prec \cdots \prec x_N$ 表示排成一定次序的变量. 多项式在未明确表示时，是指 $\mathbf{K}[x_1, \cdots, x_N]$中的多项式. 若

$$\Phi: A_1, A_2, \cdots, A_n$$

是一升列，其类 p_i 有关系

$$0 < p_1 < \cdots < p_n$$

则如上节将改记 x 为 u, y, 并改变次序为

$$u_1 \prec \cdots \prec u_d \prec y_1 \prec \cdots \prec y_n$$

其中 $y_i = x_{p_i}$, $d = N - n$, u_j 为诸 $k \neq p_i$ 的 x_k. 如前设

$$A_i = C_{i0} y_i^{m_i} + C_{i1} y_i^{m_i - 1} + \cdots + C_{im_i}$$

其中 $C_{ij} \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{i-1}]$, $C_{i0} \neq 0$ 为 A_i 的初式，将改记为

$$I_i = C_{i0} \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{i-1}]$$

今设 Φ不可约，以

$$\tilde{\eta} = (u_1, \cdots, u_d, \eta_1, \cdots, \eta_n)$$

为一母点，其中诸 η_i 的意义同上节. 依上节定理，有一不可约多项式组 Ω_Φ 以 Φ 为基列，以 $\tilde{\eta}$ 为母点，且 Ω_Φ 可依一机械方法从 Φ 作出. 因而 Φ 不可约为 Φ 可作为一不可约多项式组 (Ω_Φ) 的基列的一个充份条件. 对此可作下述补充:

引理 1 设多项式组 Λ 的基列 Φ 不可约，Φ 中各项 A_i 的类都大于 0，而初式为 I_i, $i = 1, \cdots, n$. 又设 Λ 中任一多项式对 Φ 的余式都是 0，则 Λ 有一分解

$$|\Lambda| = |\Omega_\Phi| \cup |\Lambda + I_1| \cup \cdots \cup |\Lambda + I_n|$$

其中 Ω_Φ 或其代数簇 $|\Omega_\Phi|$ 不可约.

证 对 Φ 的余式为 0 的任一多项式特别是 Λ 中的任一多项式

G都有 $s_i \geqslant 0$ 与 $Q_i \in \mathbf{K}[u_1 \cdots, u_d, y_1, \cdots y_n]$，使

$$I_1^{s_1} \cdots I_n^{s_n} G = Q_1 A_1 + \cdots + Q_n A_n$$

依上节 G 必是 Ω_Φ 中多项式的线性和，故 Ω_Φ 的任一扩充零点都是 G，因此是 Λ 的扩充零点. 反之对 Λ 的任一扩充零点，作为诸 A_i 的扩充零点，依上式必为任一 G 或某一 I_i 的扩充零点，即为 Ω_Φ 或某一 $\Lambda + I_i$ 的扩充零点. 故有引理中的分解.

引理 2 设 Λ, Φ 如引理 1，且已知多项式组 Λ 不可约则

$$\Lambda \approx \Omega_\Phi \text{ 或 } |\Lambda| = |\Omega_\Phi|$$

证 命 Φ 中各项的初式为 $I_i, i = 1, \cdots, n$，则显有

$$|\Lambda + I_1| \cup \cdots |\Lambda + I_n| = |\Lambda + I_1 \cdots I_n|$$

因此引理 1 中的分解可简写为

$$|\Lambda| = |\Omega_\Phi| \cup |\Lambda + I_1 \cdots I_n|$$

因 Φ 的母点也是 Ω_Φ 的母点不能是 $I_1 \cdots I_n$ 的扩充零点，故

$$|\Omega_\Phi| \not\subset |\Lambda + I_1 \cdots I_n|$$

若 Λ 有扩充零点，且非 Ω_Φ 的扩充零点，因而为 $\Lambda + I_1 \cdots I_n$ 的扩充零点，将有

$$|\Lambda + I_1 \cdots I_n| \not\subset |\Omega_\Phi|$$

而 $|\Lambda|$ 有一不可缩分解与 Λ 不可约的假设相违，故有 $|\Lambda| \subset |\Omega_\Phi|$. 反之有 $|\Omega_\Phi| \subset |\Lambda|$，故得 $|\Lambda| = |\Omega_\Phi|$. 如所欲证.

今试考虑升列 Φ 如前，但 Φ 非不可约的情形. 这时应有一 k，使

$$\Phi_{k-1}: A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$$

不可约，且以

$$\tilde{\eta}_{k-1} = (u_1, \cdots, u_d, \eta_1, \cdots, \eta_{k-1})$$

为一母点，但 A_k 中在以 $\eta_1, \cdots, \eta_{k-1}$ 代 $y_1, \cdots, y_{k-1}$ 后所得多项式 $\tilde{A}_k$ 在 $\mathbf{K}_{k-1}[y_k]$ 中可约，这里 $\mathbf{K}_{k-1} = \mathbf{K}_0(\eta_1, \cdots, \eta_{k-1})$. 设 $\tilde{A}_k$ 在 $\mathbf{K}_{k-1}[y_k]$ 中的不可约因子分解为

$$\tilde{A}_k = g_1 \cdots g_h$$

其中 $g_i \in \mathbf{K}_{k-1}[y_k]$ 不可约，而 $h \geqslant 2$. 因 g_i 中诸 y_k 幂次的系数

都是 $\mathbf{K}_{k-1}$ 中的元素而可表示为两个 $u_1, \cdots, u_d, \eta_1, \cdots, \eta_{k-1}$ 的多项式之商，故经通分后可得一式

$$\widetilde{D}\widetilde{A}_k = \widetilde{G}_1 \cdots \widetilde{G}_h$$

其中 $D \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{k-1}]$，$G_i \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_k]$，而 $\widetilde{D}$，$\widetilde{G}_i$ 为将 D，G_i 中 $y_1, \cdots, y_{k-1}$ 代以 $\eta_1, \cdots \eta_{k-1}$ 后所得 y_k 的多项式 $\in \mathbf{K}_{k-1}[y_k]$. 这里还不妨将$D$看作对 Φ_{k-1} 已经约化. 同样也不妨假定 G_j 已经对 Φ_k 约化.

今将多项式 $G_1 \cdots G_h - DA_k$ 按 y_k 的幂次展开，设为

$$G_1 \cdots G_h - DA_k = \sum_j B_j y_k^j$$

其中 $B_j \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{k-1}]$. 命以 $\eta_1, \cdots, \eta_{k-1}$ 代入 B_j 中 $y_1, \cdots, y_{k-1}$ 所得 $\mathbf{K}_{k-1} = \mathbf{K}_0(\eta_1, \cdots, \eta_{k-1})$ 中的数为 b_j，则由于 $\widetilde{D}\widetilde{A}_k = \widetilde{G}_1 \cdots \widetilde{G}_h$，故得 $b_j = 0$. 换言之，每一 B_j 都以 $\tilde{\eta}_{k-1}$ 为一扩充零点，故依上节引理 3 证明中所示，每一 B_j 对不可约升列 Φ_{k-1} 的余式都为 0，即有非负整数 $s_{j1}, \cdots, s_{j,k-1}$ 与多项式 $Q_{ji} \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{k-1}]$，使 ($C_{i0} = I_i$)

$$I_1^{s_{j1}} \cdots I_{k-1}^{s_{j,k-1}} B_j = \sum_{i=1}^{k-1} Q_{ji} A_i$$

命 $s_i = \operatorname{Max}_j(s_{ji})$，即得

$$I_1^{s_1} \cdots I_{k-1}^{s_{k-1}} (G_1 \cdots G_h - DA_k) = \sum_{i=1}^{k-1} Q_i A_i$$

或

$$I_1^{s_1} \cdots I_{k-1}^{s_{k-1}} G_1 \cdots G_h = \sum_{i=1}^{k} Q_i A_i$$

其中 Q_i 都是 $u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_k$ 的多项式.

从上式容易得出下面的引理:

引理 3 设多项式组 Λ 的基列为 Φ，Φ 中各项 A_i 的类都大于 0，初式为 I_i，$i = 1, \cdots, n$. 又设 Φ 可约，即有 k 使 Φ 的首 $k-1$ 项所成升列 Φ_{k-1} 不可约，以 $\tilde{\eta}_{k-1} \in \mathbf{K}_{k-1}$ 为母点，而第 k 项 A_k 在以 $\tilde{\eta}_{k-1}$ 代其中相应变量后所得多项式可约，从不可约分解得多项

式 $G_1, \cdots, G_h$，则有一分解

$$|A| = |A + I_1| \cup \cdots \cup |A + I_{k-1}| \\ \cup |A + G_1| \cup \cdots \cup |A + G_h|$$

证 上式右端任一 $A + I_i$ 或 $A + G_j$ 的扩充零点都是 A 的扩充零点．反之，A 的任一扩充零点应是诸 A_i 的扩充零点．因而依引理前面的一式必是某一 I_i 或某一 G_j 的扩充零点，也即是某一 $A + I_i$ 或某一 $A + G_j$ 的扩充零点．由此即得分解式．

引理 4 设多项式组 A 以 Φ 为基列，如引理 1 或 3 所示．则在引理 1 或 2 的 $|A|$ 的分解式中，右端出现的任一多项式组 $A+I_i$ 或 $A + G_j$ 的基列比 Φ 都有较低的秩．

证 由于 I_i 显然已对 Φ 约化，又诸 G_j 已假定对 Φ_k 因而对 Φ 约化，故本引理可直接从 4.3 节的引理 3 得出．

引理 5 设多项式组 A 不可约，并以不可约的升列 Φ 为其基列．又设多项式组 A, A' 中每一多项式对 Φ 的余式为 0，则

$$|A| \cup |A'| = |A'|$$

即分解 $|A| \cup |A'|$ 可缩．

证 由引理 2 有 $|\Omega_\Phi| = |A|$．按假设，A' 中的任一多项式 G' 对 Φ 的余式为 0，故由上节引理 3，G' 以 Φ 的母点即 Ω_Φ 的母点为扩充零点，因而 $G' = 0 | \Omega_\Phi$．由此得 $A' = 0 | \Omega_\Phi$ 或 $|\Omega_\Phi| \subset |A'|$，亦即 $|A| \subset |A'|$，故引理成立．

依据以上诸引理以及 4.3 和 4.4 节即可得出将任一多项式组作出不可缩的不可约分解的机械方法如次．

设给定的多项式组为 Σ．依据 4.3 节的整序定理，可依机械方法逐次扩充 Σ，以得一多项式组的递增序列

$$\Sigma = \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \cdots \subset \Sigma_q = A$$

使各多项式组都互相等价，即

$$\Sigma = \Sigma_1 \approx \Sigma_2 \approx \cdots \approx \Sigma_q = A$$

此时出现两种情形．一是在某一步时 A 成为一矛盾组即其基列只有一项为 $\mathbf{K}_0$ 中的不等于 0 的数．这时 Σ 本身为矛盾组即无扩充零点可言．故只需考虑另一情形．这时 A 有一基列

$$\Phi: A_1, A_2, \cdots, A_n$$

以 $I_1, \cdots, I_n$ 为初式，A_1 的类大于 0，并具有以下性质：Λ 中任一多项式对 Φ 的余式都等于 0，Σ 的任一扩充零点都是 Φ 的扩充零点，而 Φ 的任一扩充零点只需不是任一初式 I_i 的扩充零点，即也是 Σ 的扩充零点.

今依 4.2 节中的机械方法可以检查 Φ 是否可约，即诸 A_i 在逐步扩充的数域 $\mathbf{K}_{i-1}$ 中是否可约. 此时可有两种情形.

在第一种情形中 Φ 不可约. 这时依引理 1 有分解

$$|\Lambda| = |\Omega_\Phi| \cup |\Lambda + I_1| \cup \cdots \cup |\Lambda + I_n|$$

其中已知 Ω_Φ 不可约，而诸 $\Lambda + I_i$ 都有秩较 Λ 为低的基列. 今对每一 $\Lambda + I_i$ 可作为一新的多项式组 Σ 而如前重新开始.

在第二种情形中 Φ 可约. 这时依引理 3 有分解

$$|\Lambda| = |\Lambda + I_1| \cup \cdots \cup |\Lambda + I_{k-1}| \\ \cup |\Lambda + G_1| \cup \cdots \cup |\Lambda + G_h|$$

其中任一 $\Lambda + I_i$ 或 $\Lambda + G_j$ 都有秩较 Λ 为低的基列，于是可对每一 $\Lambda + I_i$ 或 $\Lambda + G_j$ 作为新的多项式组而如前重新开始.

不论何种情形，试将每一 $\Lambda + I_i$ 或 $\Lambda + G_j$ 逐一作为新多项式组 Σ' 而如前进行，得序列

$$\Sigma' = \Sigma'_1 \approx \Sigma'_2 \approx \cdots \approx \Sigma'_{q'} = \Lambda'$$

Λ' 的基列系由一不等于 0 的 $\mathbf{K}$ 中的数所构成时，可将 $|\Lambda'|$ 也即原来的 $|\Lambda + I_i|$ 或 $|\Lambda + G_j|$ 从分解式中除去. 对于相反情形 $|\Lambda'|$ 将分解为若干个具有基列的秩较前为低的多项式组的代数簇，或除此外还另有一以不可约升列 Φ' 作为基列的不可约多项式组 $\Omega_{\Phi'}$. 可依引理 5 检查是否 $\Omega_{\Phi'}$ 可从分解中除去或在以后的分解中继续保留. 这样我们获得了 $|\Lambda|$，也即 $|\Sigma|$ 的进一步分解. 其中已出现若干个不可约多项式组 Ω_Φ，$\Omega_{\Phi'}$ 以及若干个 $\Lambda' + I'$ 或 $\Lambda' + G'$ 一类的多项式组. 对于后者可进一步分解.

由于每一次需要进一步分解的 $\Lambda' + I'$ 或 $\Lambda' + G'$ 都有秩较前为低的基列，故由 4.3 节的引理 1 或引理 1′，这种分解在有限步后必然停止. 因此在有限步后必可得一分解如下:

$$|\Sigma| = |\Omega_{\Phi_1}| \cup |\Omega_{\Phi_2}| \cup \cdots \cup |\Omega_{\Phi_s}|$$

其中 Φ_i 都是不可约升列，Ω_{Φ_i} 为依 4.4 节定理所确定的不可约多项式组.

依据上面的作法，每一$|\Omega_{\Phi_i}|$都不能$\subset$以后出现的$|\Omega_{\Phi_j}|$，$j > i$ 中，但不能保证某一$|\Omega_{\Phi_i}|$可$\subset$前面出现的某一$|\Omega_{\Phi_j}|$，$j < i$ 中.这是因为在作法中每次应用 4.4 节的定理时，实际上只要求对 Φ_i 有 Ω_{Φ_i} 存在这一事实. 如果我们假定该定理的全部，即由 Φ_i 可具体作出 Ω_{Φ_i} 的多项式时，就可应用引理 5 检查是否某一 $|\Omega_{\Phi_i}| \subset$ 前面一个$|\Omega_{\Phi_j}|$，$j < i$ 中，而可从上面分解式中收缩掉. 因此在 4.4 节中定理的作法给出的情形下，即可获得 $|\Sigma|$ 的一个不可缩的不可约分解. 总结起来，即有下述定理.

定理 有一机械方法可在有限步之后对任一多项式组 Σ 得一不可缩的不可约分解

$$|\Sigma| = |\Omega_{\Psi_1}| \cup \cdots \cup |\Omega_{\Psi_t}|$$

其中每一 Ψ_i 都是 Ω_{Ψ_i} 的不可约基列.

在机器证明的具体应用中，事实上不必将 $|\Sigma|$ 分解到不可缩的程度，而只需进行到前面那种或许是可缩的分解即已足够. 因而 4.4 节中的定理对我们的应用来说只需知道它的存在部份即可.

4.6 代数簇的构造性理论——维数概念与维数定理

仍设特征为 0 的基本数域$\mathbf{K}$与变量

$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_N$$

如前. 设 Σ 是一不可约多项式组，则在将 x_i 改变符号并重新排列为

$$u_1 \prec \cdots \prec u_d \prec y_1 \prec \cdots \prec y_n \quad (n + d = N)$$

后，Σ 的基列

$$\Phi: A_1, A_2, \cdots, A_n$$

具有以下性质:

$$A_i = C_{i0}y_i^{m_i} + C_{i1}y_i^{m_i-1} + \cdots + C_{im_i}$$

其中 $C_{ij} \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{i-1}]$, $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(u_1, \cdots, u_d)$, $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}_{i-1}(\eta_i)$, A_i 中以 $\eta_1, \cdots, \eta_{i-1}$ 代 $y_1, \cdots y_{i-1}$ 后所得多项式 $\widetilde{A}_i$ 在 $\mathbf{K}_{i-1}[y_i]$ 中不可约，η_i 为 $\widetilde{A}_i = 0$ 的扩充解. 如前

$$\tilde{\eta} = (u_1, \cdots, u_d, \eta_1, \cdots, \eta_n)$$

称为不可约升列 Φ 的一个母点，d 称为 Φ 的维数，记作

$$d = \dim \Phi$$

在 Σ 与 Φ 间有以下关系. Φ 是 Σ 的基列，而 Σ 等价于从 Φ 依一机械作法定义的不可约多项式组 Ω_Φ: $\Sigma \approx \Omega_\Phi$ 或 $|\Sigma| = |\Omega_\Phi|$. 恢复 u, y 的原来符号 x 并依原来排列而将 $\tilde{\eta}$ 改为 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N)$ (括号中排列次序在两种符号中有所不同，但不应引起混淆)，则 ξ 为不可约代数簇 $|\Sigma|$ 的一个母点. 又对任一多项式 $F \in \mathbf{K}[x_1, \cdots, x_N]$, 以下诸条件等价:

1. $F = 0 | \Sigma$.

2. $F = 0$ 以 ξ 为扩充解.

3. F 对 Φ 的余式为 0.

4. F 为 Ω_Φ 中多项式的线性和，和中每一项的系数都是 $\mathbf{K}[x_1, \cdots, x_N]$ 中的多项式.

这些性质都已在前面几节中证明过，现再补充另一性质. 为此称 $\mathbf{K}$ 的一个扩域 $\widetilde{\mathbf{K}}$ 对 $\mathbf{K}$ 的**超越度**为 d, 如果 $\widetilde{\mathbf{K}}$ 有 d 个数对 $\mathbf{K}$ 代数无关，而 $\widetilde{\mathbf{K}}$ 中任意 $d+1$ 个数都对 $\mathbf{K}$ 代数相关，即 d 为 $\widetilde{\mathbf{K}}$ 中对 $\mathbf{K}$ 代数无关的数的最小个数. 这里**代数无关**则如下定义: $\widetilde{\mathbf{K}}$ 中 e 个数 $\tau_1, \cdots, \tau_e$ 称为对 $\mathbf{K}$ **代数无关**，如果对任一非 0 多项式 $f(t_1, \cdots, t_e) \in \mathbf{K}[t_1, \cdots, t_e]$, 都有 $f(\tau_1, \cdots, \tau_e) \neq 0$.

如前，称以 Φ 的母点 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_N)$ 或 $\tilde{\eta} = (u_1, \cdots u_d, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ 添入 $\mathbf{K}$ 所得扩域

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K}(u_1, \cdots, u_d, \eta_1, \cdots, \eta_n) = \mathbf{K}(\xi_1, \cdots, \xi_N)$$

为 Φ 的**母域**. 则因 $\widetilde{\mathbf{K}}$ 是 $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(u_1, \cdots, u_d)$ 的代数扩张而 $\mathbf{K}_0$ 对 $\mathbf{K}$ 的超越度显为 d, 故由数域代数扩张的一般理论有下面的引理:

引理 1 设不可约升列Φ的母点 η或ξ 与母域 $\mathbf{K}=\mathbf{K}(\xi)=\mathbf{K}(\eta)$，则 $\dim\Phi$ 即$\mathbf{K}$对$\mathbf{K}$的超越度.

引理 2 设基与 $(x_1,\cdots,x_N)$ 相应的$\mathbf{K}$上线性空间$\mathbf{K}^N$中有两个扩充点 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_N)$ 与 $\xi'=(\xi_1',\cdots,\xi_N')$，其中$\xi'$是$\xi$的子点. 则扩域 $\tilde{\mathbf{K}}'=\mathbf{K}(\xi_1',\cdots,\xi_N')$ 的超越度$\leqslant$扩域 $\tilde{\mathbf{K}}=\mathbf{K}(\xi_1,\cdots,\xi_N)$ 对$\mathbf{K}$的超越度.

证 设$\tilde{\mathbf{K}}$对$\mathbf{K}$的超越度为d. 在 $\xi_1',\cdots,\xi_N'$ 中考虑任意$d+1$个，例如 $\xi_{i_1}',\cdots,\xi_{i_{d+1}}'$. 由于$\tilde{\mathbf{K}}$对$\mathbf{K}$的超越度为$d$，故 $\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_{d+1}}$ 对$\mathbf{K}$代数相关，即有非0多项式 $F(z_1,\cdots,z_{d+1})\in\mathbf{K}[z_1,\cdots,z_{d+1}]$，使 $F(\xi_{i_1},\cdots,\xi_{i_{d+1}})=0$. 由于$\xi'$是$\xi$的子点，故也有 $F(\xi_{i_1}',\cdots,\xi_{i_{d+1}}')=0$，因而 $\xi_{i_1}',\cdots,\xi_{i_{d+1}}'$ 对$\mathbf{K}$代数相关. 由代数扩域的一般理论即知任意$\tilde{\mathbf{K}}'$中$d+1$个元素都代数相关，即$\tilde{\mathbf{K}}'$对$\mathbf{K}$的超越度$\leqslant d$. 证毕.

定理 设两等价的不可约多项式组Σ与Σ'各有不可约基列Φ与Φ'，则

$$\dim\Phi=\dim\Phi'$$

证 设Φ, Φ'的母点各为ξ与ξ'，则ξ与ξ'也是不可约代数簇$|\Sigma|$与$|\Sigma'|$的母点. 因 $\Sigma\approx\Sigma'$，故$|\Sigma|$与$|\Sigma'|$有相同的扩充零点集. 于是，ξ'也是$|\Sigma|$的扩充零点且为$|\Sigma|$母点ξ的一个子点. 同样ξ也是ξ'的子点. 由引理2，扩域$\mathbf{K}(\xi)$与$\mathbf{K}(\xi')$对$\mathbf{K}$的超越度相等，也即 $\dim\Phi=\dim\Phi'$. 证毕.

由于这一定理，下面的定义是合理的.

定义 设不可约多项式组Σ的基列为Φ，则Φ的维数也称为Σ的维数或不可约代数簇$|\Sigma|$的维数，记作$\dim\Sigma$或$\dim|\Sigma|$. 对任一多项式组Σ，依上节可作出$|\Sigma|$的不可缩的不可约分解. 这一分解中不可约成分维数的最大者称为Σ或$|\Sigma|$的维数，仍记为$\dim\Sigma$或$\dim|\Sigma|$.

本节的目的在于证明下面的定理:

维数定理 设不可约多项式组Σ与其不可约基列Φ，又设B为任一对Φ的余式不等于0的多项式，则

$$\dim(\Sigma + B) < \dim \Sigma$$

证 设 Φ: $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 以及母点 $\tilde{\eta} = (u_1, \cdots, u_d, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ 如前，则

$$\dim \Sigma = \dim \Phi = d$$

今依 4.4 节引理 4，必有多项式

$$C, Q_i \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_n] \quad i = 1, \cdots, n$$

使

$$D = CB - (Q_1A_1 + \cdots + Q_nA_n) \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d]$$

且使

$$C(\tilde{\eta}) \neq 0$$

由此得

$$D(u_1, \cdots, u_d) \neq 0$$

今设多项式组 Λ 是 $\Sigma + B$ 的任一不可约成份，且

$$\tilde{\zeta} = (v_1, \cdots, v_d, \zeta_1, \cdots, \zeta_n)$$

是 Λ 的一个母点. 由于 $\tilde{\zeta}$ 也是 Σ 的一个扩充零点，故 $\tilde{\zeta}$ 是 Σ 母点 $\tilde{\eta}$ 的一个子点，特别有

$$A_i(\tilde{\zeta}) = 0 \qquad i = 1, \cdots, n$$

此外又有

$$B(\tilde{\zeta}) = 0$$

故得 $D(\tilde{\zeta}) = 0$，即

$$D(v_1, \cdots, v_d) = 0$$

因而 $v_1, \cdots, v_d$ 代数相关.

由于 $\tilde{\eta}$ 的超越度是 d，而 $u_1, \cdots, u_d$ 代数无关，故对每一 $i = 1, \cdots, n$ 有非 0 多项式 $P_i \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, t]$，使

$$P_i(u_1, \cdots, u_d, \eta_i) = 0$$

而在 P_i 中 t 最高幂次的系数为 $u_1, \cdots, u_d$ 的非 0 多项式. 由于 $\tilde{\zeta}$ 是 $\tilde{\eta}$ 的子点，故得

$$P_i(v_1, \cdots, v_d, \zeta_i) = 0$$

由此可推出 ζ_i 代数依赖于 $v_1, \cdots, v_d$，即在 $v_1, \cdots, v_d, \zeta_1, \cdots, \zeta_n$ 间代数无关的个数至多为 $d - 1$，故

$$\dim \Lambda = \dim \tilde{\xi} \leqslant d - 1$$

因对 $\Sigma + B$ 的任一不可约成份 Λ 都如此，故得此定理.

这一维数定理在直观上颇为显然，但其证明却并不简单，不妨参阅一些流行的代数几何著作，即可看到证明往往需要用到颇为艰深的工具. 例如 Hodge-Pedoe [1] 中的证明用到了周炜良坐标，Van der Waerden [3] 一书的证明用到了代数对应原理，Gröbner [1] 一书则用到了 Hilbert 的示性多项式理论等. 这里的证明似乎简单得多，而且既是初等又是构造性的.

4.7 无序几何机械化定理的证明

本节将给出在 4.1 节中即已提出的机械化定理的证明. 为此先作若干准备.

仍设一组变量 $x_1, \cdots, x_N$ 排列成一次序

$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_N$$

又设特征为 0 的基本数域 $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}[x_1, \cdots, x_N]$ 中一组多项式的升列

$$\Phi: A_1, A_2, \cdots, A_n$$

其类 p_i 满足

$$0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n$$

改写 x_{p_i} 为 y_i，又改写其余诸 x 为 $u_1, \cdots, u_d$，这里 $d = N - n$. 则 A_i 可写成形式

$$A_i = c_{i0} y_i^{m_i} + c_{i1} y_i^{m_i - 1} + \cdots + c_{im_i}$$

其中

$$c_{ij} \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{i-1}]$$
$$(i = 1, \cdots, n; j = 0, 1, \cdots, m_i)$$

置

$$I_i = c_{i0} \in \mathbf{K}[u_1; \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{i-1}]$$

则 I_i 即 A_i 的初式，$i = 1, \cdots, n$. 我们称每一

$$I_i \neq 0$$

为一非退化条件.

今设 $\mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_n]$ 中一多项式 G. 作 G 对 Φ 的余式 R,则由余式公式有

$$I_1^{s_1}\cdots I_n^{s_n}G = Q_1A_1 + \cdots + Q_nA_n + R$$

其中 $s_i \geqslant 0$, $Q_i \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_n]$.

我们将探求

$$G = 0$$

可从 $A_i = 0, i = 1, \cdots, n$, 推出的充要条件. 实际上我们将证明在非退化条件 $I_i \neq 0$ 下以及 Φ 不可约时这一充要条件即, 是 $R = 0$.

由上余式公式,不论 Φ 是否不可约,条件的充分性都是显然的.

定理 1 设 Φ, A_i, I_i, G 如上,则不论 Φ 是否可约,在非退化条件

$$I_i \neq 0 \qquad i = 1, \cdots, n$$

下, $R = 0$ 时, $G = 0$ 可从 $A_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$, 推出.

在 Φ 不可约时, $R = 0$ 将不仅是在非退化条件下 $G = 0$ 可从 $A_i = 0$ 推出的充份条件,而且也是必要条件. 但这时的证明要困难得多. 见下面的定理.

定理 2 设 Φ, A_i, I_i, G 如上, 而 Φ 不可约. 若 $G = 0$ 在非退化条件 $I_i \neq 0$ 下可从 $A_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$ 推出(对某一适当的$\mathbf{K}$的扩域而言),则 G 对 Φ 的余式为 $R = 0$.

证 我们将设 $R \neq 0$ 而得出矛盾. 为此应用 4.4 节引理 4 知,有多项式 S, $Q_i \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_n]$, 使

$$T = SR - (Q_1A_1 + \cdots + Q_nA_n) \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d]$$

且 T 为非 0 多项式: $T \neq 0$. 又由 4.4 节中引理 3 及其证明知 A_i 的初式 I_i 的余式不等于 0,故同样有 J_i, $Q_{ij} \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_{i-1}]$, 使

$$H_i = J_iI_i - (Q_{i1}A_1 + \cdots + Q_{i,i-1}A_{i-1}) \neq 0 \text{ 且} \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d]$$

于是在 $\mathbf{K}^d(u_1, \cdots u_d)$ 中有一点 $\bar{u} = (\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_d)$, 使在 $\bar{u}$ 上有

$$TH_1\cdots H_n \neq 0$$

这里 $\bar{u}$ 可取为任一 d 维方体中的一个内部有理点.

今将对 i 归纳证明在$\mathbf{K}$的适当扩域中有数 $\bar{\eta}_i$,使点

$$\zeta_i = (\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_d, \bar{\eta}_1, \cdots, \bar{\eta}_i) \in \mathbf{K}^{d+i}(u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_i)$$

满足关系式

$$A_i(\zeta_i) = 0 \qquad I_{i+1}(\zeta_i) \neq 0$$

首先在 $i = 1$ 时,命将 $\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_d$ 代 $u_1, \cdots u_d$, 从 A_1 与 I_1所得的多项式与数分别记为 $\bar{A}_1 \in \mathbf{K}[y_1]$ 与 $\bar{I}_1 \in \mathbf{K}$. 由于

$$H_1 = J_1 I_1$$

在 $\bar{u}$ 处不等于 0, 故 $\bar{I}_1 \neq 0$, $\bar{A}_1$ 为一 y_1 的次数 $m_1 \geqslant 1$ 的多项式, 因而可在 $\mathbf{K}$的某一扩域中取 $\bar{\eta}_1$,使 $\bar{A}_1(\bar{\eta}_1) = 0$ 或 $A_1(\zeta_1) = 0$.又由于

$$H_2 = J_2 I_2 - Q_{21} A_1$$
$$H_2(\zeta_1) = H_2(\bar{u}) \neq 0$$

故得

$$I_2(\zeta_1) \neq 0$$

即归纳假设在 $i = 1$ 时成立.

今设 $\bar{\eta}_1, \cdots, \bar{\eta}_i, \zeta_i$ 已求得满足归纳假设并进而求 $\bar{\eta}_{i+1}$ 与 ζ_{i+1} 如次.

命以 $\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_d, \bar{\eta}_1, \cdots, \bar{\eta}_i$ 代 $u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots, y_i$ 从 A_{i+1} 所得的多项式为 $\bar{A}_{i+1} \in \tilde{\mathbf{K}}[y_{i+1}]$, 此处 $\tilde{\mathbf{K}}$ 为含有 $\bar{\eta}_1, \cdots, \bar{\eta}_i$的某一 $\mathbf{K}$ 的扩域. 这时 $\bar{A}_{i+1}$ 中 y_{i+1} 最高次项 $y_{i+1}^{m_{i+1}}$ 的系数为 $I_{i+1}(\zeta_i) \neq 0$.因而可在$\tilde{\mathbf{K}}$或即$\mathbf{K}$的某一扩域中取 $\bar{\eta}_{i+1}$,使 $\bar{A}_{i+1}(\bar{\eta}_{i+1}) = 0$ 或

$$A_{i+1}(\zeta_{i+1}) = 0$$

今有

$$H_{i+2} = J_{i+2} I_{i+2} - (Q_{i+2,1} A_1 + \cdots + Q_{i+2,i+1} A_{i+1})$$
$$H_{i+2}(\zeta_{i+1}) = H_{i+2}(\bar{u}) \neq 0$$

以及

$$A_1(\zeta_{i+1}) = A_1(\zeta_1) = 0$$

$\cdots$

$$A_{i+1}(\zeta_{i+1}) = 0$$

故代入 H_{i+2} 一式得

$$I_{i+2}(\zeta_{i+1}) \neq 0$$

至此归纳得证.

由于R是G对Φ的余式，故有 $s_i \geqslant 0$ 与多项式 $B_i \in \mathbf{K}[u_1, \cdots, u_d, y_1, \cdots y_n]$，使

$$I_1^{s_1} \cdots I_n^{s_n} G = B_1 A_1 + \cdots + B_n A_n + R$$

由上述归纳证明有

$$I_i(\zeta_n) \neq 0 \qquad A_i(\zeta_n) = 0$$

依定理假设在非退化条件 $I_i \neq 0$ 下 $G = 0$ 可从 $A_i = 0$ 推出，故由上式应有

$$G(\zeta_n) = 0$$

因此以 ζ_n 代入G的余式公式时，可得

$$R(\zeta_n) = 0$$

但依 $\bar{u}$ 的取法有

$$T(\zeta_n) = T(\bar{u}) \neq 0$$

故以 ζ_n 代入

$$T = SR - \Sigma Q_i A_i$$

一式得出矛盾.

由此知 $R \neq 0$ 的假定不能成立，而定理得证.

以下将给出无序几何机械化定理的证明.

给定一个无序几何中的几何语句(S)，我们的目的在于给出一个机械化方法以判定(S)是否成立. 为此先选定坐标系，给出各点的坐标，并将所涉及的坐标用 x_i 表示，且排成一定次序:

$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_N$$

其次将语句 (S) 中所提及的各种几何关系通过坐标间的代数关系来表达，于是语句 (S) 中的假设相当于一组方程:

$$F_1 = 0, \cdots, F_s = 0$$

这里 F_i 是 $\mathbf{K}[x_1, \cdots, x_N]$ 中的多项式，$\mathbf{K}$是相应几何的附属数域，其特征为 0. 实际上这些 F_i 都可取为有理系数或整系数的多

项式，语句(S)的结论则相当于另一组方程：

$$G_1 = 0, \cdots, G_t = 0$$

这里 G_j 也是 $\mathbf{K}[x_1, \cdots, x_N]$ 中的多项式，实际上也是有理系数或整系数的多项式. 不失一般性，不妨直接设 G_j 只有一个，以下记为 G，诸 F_i 称为语句(S)的假设多项式，而诸 G_j 或 G 称为语句(S)的终结多项式.

至此机械化定理的证明在于给出一个机械化方法，使得足以在有限步内给出一组非退化条件多项式 $D_1, \cdots, D_r$，这里诸 D_k 都是 $\mathbf{K}[x_1, \cdots, x_N]$ 的多项式，而实际上系数都是有理数或整数，又依这一机械化方法足以在有限步内判定在非退化条件

$$D_1 \neq 0, \cdots, D_r \neq 0$$

下，$G = 0$ 是否可从 $F_1 = 0, \cdots, F_s = 0$ 推出.

运用前几节所发展了的代数几何的语言，上述机械化定理的证明方法也可以甚至更为精确地表达如下：

记诸假设多项式 F_i 所成的多项式组为

$$\Sigma = \{F_i\}$$

Σ 定义了一个代数簇 $|\Sigma|$，有一确定的维数 d，试依一机械化方法求得一组非退化条件 $D_1, \cdots, D_r$，使将每一 D_i 添入 Σ 后，所得多项式组 $\Sigma + D_i$ 所定义的代数簇 $|\Sigma + D_i|$ 的维数都小于 d. 又依这一机械化方法判定在条件 $D_1 \neq 0, \cdots, D_r \neq 0$ 下，也即代数簇 $|\Sigma|$ 在除去 $|\Sigma + D_i|$ 这些真子簇后所余下的部份上 G 是否等于 0.

本章以前各节关于构造性的代数簇理论以及本节的两个定理已经提供了如下的一种机械化方法.

依 4.5 节可将代数簇 $|\Sigma|$ 作出它的不可约分解，其中每一不可约成份都有一不可约基列 Φ_i，且这一成份即由这一基列所定，依以前的记号为 $|\Omega_{\Phi_i}|$. 又每一 $|\Omega_{\Phi_i}|$ 的维数 d_i 如果小于 $|\Sigma|$ 的维数 d，则这一真子簇系从某一维数为 d 的 $|\Omega_{\Phi_j}|$ 在添加某一多项式 D_i(用以前的记号为一初式 I_k 或一 G_l) 入 Φ_j 后 $|\Phi_j + D_i|$ 的一个子簇. 我们把每一这样的 D_i 作为一个非退化多项式. 设除去

这些真子簇后余下的 d 维不可约成份为

$$|\Omega_{\Phi_1}|, \cdots, |\Omega_{\Phi_t}|$$

记每一这样的 Φ_j 的初式为 $I_{j1}, \cdots, I_{ju}$，并以此作为另一组非退化多项式 D_{jk}. 依据定理 1，2，在非退化条件 $D_i \neq 0$，$D_{jk} \neq 0$ 下，$G = 0$ 是否可从 $F_1 = 0, \cdots, F_s = 0$ 推出，即 G 是否在诸 $|\Omega_{\Phi_1}|, \cdots, |\Omega_{\Phi_t}|$ 除去这些 $|\Phi_j + D_i|$ 以及 $D_{jk} = 0$ 的部份后等于 0，这可依 G 对 Φ_j 的余式是否都等于 0 来判定，由此给出了机械化的方法，也就给出了机械化定理的证明.

上面的机械化证明方法在理论上看颇为简单，但对于具体的定理用这一方法进行时会遇到极大的困难. 原因是代数簇的不可约分解依赖于多项式的因子分解，而后者虽然在理论上颇为显然，但在具体实施时乃是困难的，迄今还没有一个高效率的方法. 因之上面的方法如果依所说的次序进行，将是不切实际的，即数理逻辑中所说的 non-feasible. 但对于几何定理的证明来说，我们所希望的是能够正面证明定理成立. 而依定理 1，这只要证明终结多项式 G 对某一升列的余式为 0 即可，而不必问这一升列是否不可约. 因此，对于一个具体需要验证其是否成立的定理，我们往往可以直接应用定理 1，如果通过计算得知 G 对升列的余式为 0 因而定理成立时，即已达到目的，只是在余式不为 0 时，才有必要进一步检查相应的升列是否不可约. 为此我们的机械化证法的步骤将改成下面的形式来进行. 实践已经证明，这样的机械化证法，是颇为有效的.

机械化证法在改动后的步骤如下：

考虑一多项式组的集合 ρ 与一称为退化集的多项式组 Δ. 在开始时，ρ 只有一个多项式组，即假设多项式组

$$\Sigma = \{F_1, \cdots, F_s\}$$

又退化集在开始时为

$$\Delta = \text{空集}$$

在进行中，将逐步增减 ρ 中多项式组并添入非退化多项式以得最后所要求的

$$\Delta = \{D_1, \cdots, D_r\}$$

第一步：设 ρ 非空，则从 ρ 中任取一多项式组 Σ 并将这一 Σ 从 ρ 中除去以得新的 ρ，再依 4.3 节整序定理将 Σ 逐步扩大为多项式组

$$\Sigma = \Sigma_1 \to \Sigma_2 \to \cdots \to \Sigma_q = \Lambda$$

若 Λ 有一**K**中的非 0 元素，即 Λ 为一矛盾组，则语句 (S) 的假设本身有矛盾而工作停止．对于相反情形记 Λ 的基列为

$$\Phi: A_1, A_2, \cdots, A_n$$

诸多项式 A_i 的初式为 I_i，此时 Λ 中任一其它多项式对 Φ 的余式都等于 0。

这时

$$\dim|\Sigma| = \dim \Phi = N - n = d$$

若这一步是整个进程开始的第一步，则记下这一维数 d.

若这一步是由进程中其它某一步转来，则检查这一维数 d，看是否等于开始时所记下的 d.

若这一 d 等于前面已记下的维数，则将诸初式 I_i 添入 Δ 以得新的退化集 Δ，并进行下面的第二步．

若这一 d 小于前面已记下的维数而这一步的 Σ 系由以前执行第三步(见下)时由某一 $\Lambda + I_i$ 或 $\Lambda + G_j$ 所转来，则将 I_i 或 G_j 添入 Δ 以得新的退化集，并回到第一步继续进行.

第二步：求 G 对 Φ 的余式 R.

若 $R = 0$ 而 P 中已无其它多项式组需要检查，则语句 (S) 在非退化条件

$$D_k \neq 0 \qquad (D_k \in \Delta)$$

下成立而工作停止． 此时在 $D_k \neq 0$ 条件下定理成立，否则回到第一步重新开始.

若 $R \neq 0$ 则进行下面的第三步.

第三步：依 4.2 节检查 Φ 是否不可约.

若 Φ 不可约，则因 G 对 Φ 的余式 $R \neq 0$ 故由定理 2 在非退化条件

$$D_k \neq 0 \qquad (D_k \in \Delta)$$

下语句 (S) 不成立而工作停止．这时在这些非退化条件下定理不成立．

若Φ可约，则依 4.5 节将有分解

$$|\Lambda| = |\Lambda + I_1| \cup \cdots \cup |\Lambda + I_{l-1}| \\ \cup |\Lambda + G_1| \cup \cdots \cup |\Lambda + G_h|$$

今将这些 $\Lambda + I_i$ 与 $\Lambda + G_j$ 作为新的多项式组Σ添入ρ中，且回到第一步重新开始．

依据以前各节，上述进程在有限步之后必然停止．这时将得到一个退化集

$$\Delta = \{D_k\}$$

并获得以下三种结论之一：

1. 在非退化条件

$$D_k \neq 0 \qquad (D_k \in \Delta)$$

下语句 (S) 的假设部份本身有矛盾．

2. 在上述非退化条件，即附加假定 $D_k \neq 0$ 下语句 (S) 成立，亦即定理成立．

3. 在上述非退化条件，即附加假定 $D_k \neq 0$ 下语句 (S) 不成立，亦即定理不成立．

一般说来退化情形

$$D_k = 0$$

不值得作进一步考虑，若认为有必要考虑时，可将 $D_k = 0$ 作语句(S)的又一假设，即以 $\{F_1, \cdots, F_s, D_k\}$ 代替 $\{F_1, \cdots, F_s\}$ 而如前进行即可．

这一简化了的机械化证法是切实可行的 (feasible)．下节将给出一些例子(主要用手算)．使用计算机的实例可参阅今后陆续出版的有关书籍．

4.8 无序几何机械化证法举例

以下所举各例，可说明前节关于机械化证法的梗概. 由于本书只限于手算范围故举例都尽量简单，并适当选择坐标系统以力求简化计算. 在计划缮写的《几何定理机器证明的理论、方法与实践》一书中，将举出较复杂的定理的机械化证明，其原理即如本章所示.

[例 1] **垂心定理** 三角形的三高交于一点.

在垂直几何中，这一定理系作为公理而引入的，见第二章第 2.2 节. 这里作为定理来证明，它只是机械化证明方法的一个说明，并不涉及循环论证的问题.

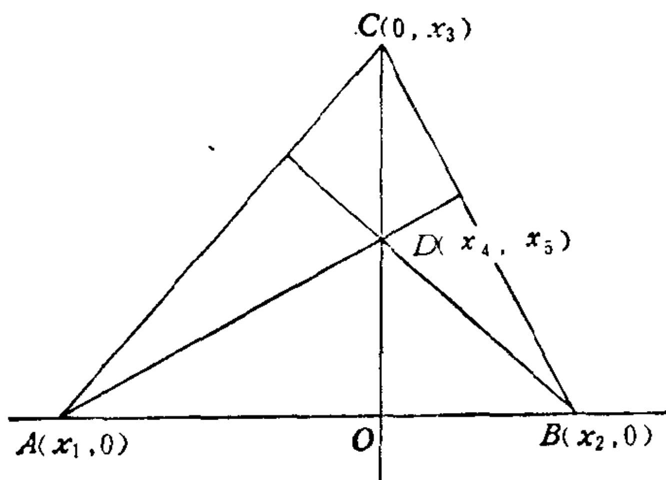


图 4.1

依第二章 2.2 节，ΔABC 的三边不能都是迷向线，故可设 AB 非迷向线. 这时 AB 与 AB 上的高线必相交于一点，设为 O. 于是可取垂直坐标系统以 O 为原点，AB 与 CO 为第一第二两坐标轴. 设 BC 与 AC 上的高线交于 D，于是需证 D 在高线 CO 上，如图 4.1.

为此设垂直坐标系统的垂率为 k，又设诸点坐标为

$$A=(x_1, 0) \qquad B=(x_2, 0) \qquad C=(0, x_3)$$
$$D=(x_4, x_5)$$

依第二章 2.3 节定理的假设部份为

$$AD \perp BC \Longleftrightarrow kx_3x_5 - x_2(x_4 - x_1) = 0$$

$$BD \perp AC \Longleftrightarrow kx_3x_5 - x_1(x_4 - x_2) = 0$$

将两式左端记为 F_1, F_2 并将多项式组 $\Sigma = \{F_1, F_2\}$ 依 4.3 节整序，得多项式组 A，其基列为

$$\Phi: A_1, A_2$$

$$A_1 = (x_1 - x_2)x_4$$

$$A_2 = kx_3x_5 - x_2(x_4 - x_1)$$

非退化条件为

$$D = kx_3(x_1 - x_2) \neq 0$$

定理的终结为

CO经过D点 $\Longleftrightarrow x_4 = 0$

显然在非退化条件

$$x_3 \neq 0 \qquad x_1 \neq x_2$$

下定理成立.

非退化条件的几何意义也是显然的:

$x_3 \neq 0 \Longleftrightarrow C$ 不在 AB 上

$x_1 \neq x_2 \Longleftrightarrow A$, B 两点不相重合

对于这些简单情形，显然已无必要对退化情形作进一步的探讨，而可作出下面的结论:

(在垂直几何中)，一个不退化的三角形的三条高线必交于一点.

事实上这是垂直几何的一条公理，这里的“证明”虽然简单，但具有一定的代表性，即非退化条件在机械化证明过程中自然地逐一出现，不必在事先考虑. 对于出现的非退化条件，如需要，可逐一作为退化条件添入假设以再度验证定理是否依然成立，这些都可有系统地机械地进行，无需多作考虑.

[例 2] **内旁心定理**　三角形三角的分角线三三交于四点.

在无序度量几何中，只有全角的概念而无通常角的概念. 一个全角的两条分角线也无法区分开来. 因此定理中的四个交点无

法象常用几何那样区分为内心与旁心，这一事实在下面的机械化证明中将反应出来。

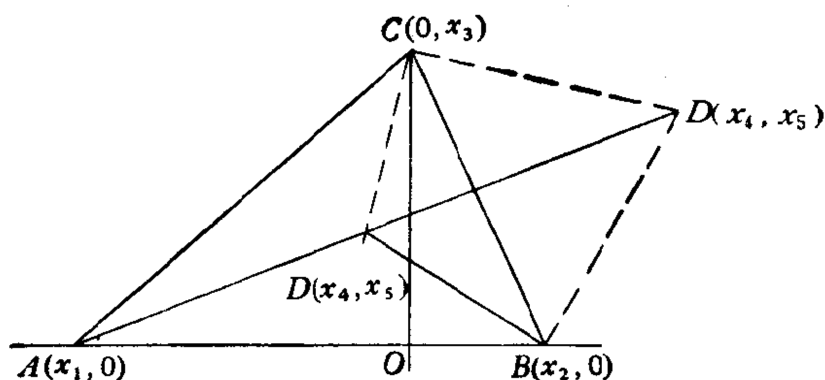


图 4.2

为计算简单起见，我们将取 $\triangle ABC$ 的一边 AB（非迷向线）为 Descartes 坐标系的第一轴，而以过 C 与 AB 垂直的直线，即 AB 上的高为第二轴．设全角 A 与全角 B 各一分角线相交于 D，需证 CD 是全角 C 的一个分角线．见图 4.2.

设诸点坐标为

$$A=(x_1, 0) \qquad B=(x_2, 0) \qquad C=(0, x_3)$$
$$D=(x_4, x_5)$$

依据第二章 2.4 节，定理的假设部份为

$AD =$ 全角 A 的分角线 $\Longleftrightarrow$

$$F_1 \equiv x_3[x_5^2-(x_4-x_1)^2]-2x_1x_5(x_4-x_1)=0$$

$BD =$ 全角 B 的分角线 $\Longleftrightarrow$

$$F_2 \equiv x_3[x_5^2-(x_4-x_2)^2]-2x_2x_5(x_4-x_2)=0$$

终结部份则为

$CD =$ 全角 C 的分角线 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}G \equiv &[x_1(x_5-x_3)+x_3x_4]\cdot[x_3(x_5-x_3)-x_2x_4]\\ &+[x_2(x_5-x_3)+x_3x_4]\cdot[x_3(x_5-x_3)-x_1x_4]\\ &=0\end{aligned}$$

今从假设部份的多项式组

$$\Sigma=\{F_1, F_2\}$$

出发，依整序方法得多项式组 Λ 与 Λ 的基列

$$\Phi: A_1,\ A_2$$

这里

$$A_1 = 4x_4(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1 - x_2) - x_3^2(2x_4 - x_1 - x_2)^2$$

$$A_2 = 2(x_4 - x_1 - x_2)x_5 - x_3(2x_4 - x_1 - x_2)$$

所需引进的非退化条件为

$$x_3 \neq 0 \qquad x_1 \neq x_2$$

$$x_4 \neq x_1 + x_2$$

今将 G 对 Φ 进行约化，则在上述非退化条件下容易求得 $4(x_4 - x_1 - x_2)^2G$ 为 A_1，A_2 的线性组合，故在这些非退化条件下定理成立.

非退化条件

$$x_3 \neq 0 \text{ 与 } x_1 \neq x_2$$

的几何意义甚为显然．为验证在退化条件

$$x_4 = x_1 + x_2$$

下定理是否依然成立，不妨将

$$F_3 = x_4 - x_1 - x_2$$

添入原来的 Σ，并对新

$$\Sigma = \{F_1,\ F_2,\ F_3\}$$

作同样的处理．可知在同样的非线性条件

$$x_3 \neq 0 \qquad x_1 \neq x_2$$

下应有

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad x_4 = 0$$

且定理在这时也成立．事实上这时的三角形对于 CO 轴对称.

在原来的基列 Φ: A_1，A_2 中，A_1 是 x_4 的四次式，而 A_2 是 x_5 的一次式，这说明了这样的几何事实：分角线的共同交点恰有四点.

[例 3]　定理同上.

由于全角的分角线在（无序）垂直几何中不一定存在，因而在

上例中，定理是作为（无序）度量几何的定理来证明的．在证明过程中，选取了 Deseartes 坐标系统．这种系统在垂直几何中一般并不存在．但事实上，同样的定理在垂直几何中也成立，仅需把定理的叙述稍加改动即可．

在垂直几何中，虽然分角线不一定存在，但恒可定义一直线对另一非迷向直线的对称直线，这时的非迷向直线即是原来直线及其反射直线所成全角的一条分角线．因此可以考虑在垂直几何中下述有意义的论断．

设 $\triangle ABD$ 的三边都非迷向线，又设 AB 对 AD的对称线与对 BD 的对称线交于一点 D，则 AC 与 BC 关于直线 CD 对称．如图 4.3．

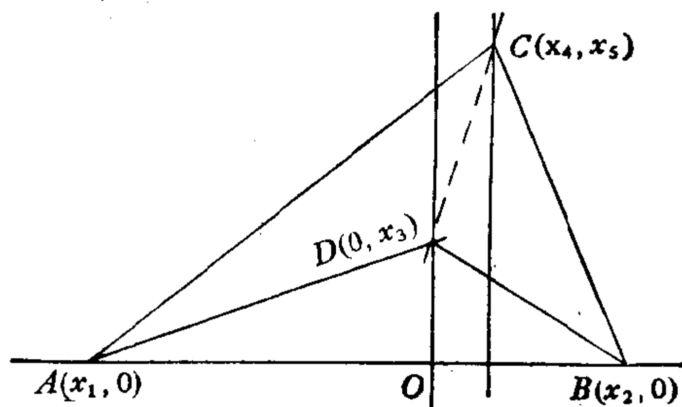


图 4.3

为证此，可取一垂直坐标系统以 AB 为第一坐标轴，过 D 而垂直于 AB 的垂线为第二坐标轴，又设坐标系统的垂率为 k，记各点的坐标为

$$A=(x_1,\ 0)\qquad B=(x_2,\ 0)\qquad D=(0,\ x_3)$$
$$C=(x_4,\ x_5)$$

于是假设部份为

$AC=AB$ 对 AD 的反射 $\Longleftrightarrow$

$$F_1\equiv(x_1^2-kx_3^2)x_5+2x_1x_3(x_4-x_1)=0$$

$BC=AB$ 对 BD 的反射 $\Longleftrightarrow$

$$F_2\equiv(x_2^2-kx_3^2)x_5+2x_2x_3(x_4-x_2)=0$$

终结部份则为

$AC = BC$ 对 CD 的反射 $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} G \equiv & [(x_4 - x_1)(x_5 - x_3) - x_4x_5] \\ & \cdot [kx_5(x_5 - x_3) + x_4(x_4 - x_2)] \\ & + [(x_4 - x_2)(x_5 - x_3) - x_4x_5] \\ & \cdot [kx_5(x_5 - x_3) + x_4(x_4 - x_1)] = 0 \end{aligned}$$

从多项式组 $\Sigma = \{F_1, F_2\}$ 出发，经过整序，可得多项式组 Λ 及其基列

$$\Phi: A_1, A_2$$

$$A_1 = (kx_3^2 + x_1x_2)x_4 - k(x_1 + x_2)x_3^2$$

$$A_2 = (x_1^2 - kx_3^2)x_5 + 2x_1x_3(x_4 - x_1)$$

在整序过程中已引进非退化条件:

$$x_3 \neq 0 \qquad x_1 \neq x_2$$

今将 G 对 Φ 进行约化，经计算即可见在上述非退化条件下 G 的余式为 0。因而知在非退化条件

$$x_3 \neq 0 \qquad x_1 \neq x_2$$

$$kx_3^2 + x_1x_2 \neq 0 \qquad x_1^2 - kx_3^2 \neq 0$$

下定理成立．这些非退化条件的几何意义也容易判明．例如，

$$kx_3^2 + x_1x_2 = 0$$

意指 $AD \perp BD$．如果以之添入假设部份并依法整序，则在

$$x_1 \neq 0 \qquad x_2 \neq 0 \qquad x_3 \neq 0$$

等非退化条件下将有

$$x_1 = x_2 \qquad kx_3^2 + x_1^2 = 0$$

换言之，A 与 B 相重合，且 $AD = BD$ 是一迷向线，因而定理假设的本身矛盾．

试将本例与上例比较．本例作为垂直几何中的定理，显然比上例仅在度量几何中才有意义的定理更为一般．因之，如果提法得当，则可获得比通常更为一般的定理，而其证明所用的计算有时更为简单．例如，这里 A_1, A_2 中 x_4 与 x_5 的次数都是 1，而上例中 x_4 的次数是 4．这是因为 D 点若已给定，则 C 点即可唯一地定出，

反之则否.

本例作为任意垂直几何中的定理,应用距离,全合等度量概念的证明显然不适用,虽然要想到一种欧几里得形式的直接证明,也并非难事,例如第二章 2.2 节的直接证明. 但这种证法将随定理而异,而与 Descartes 所提倡的主张不符.

[例 4] **Feuerbach 定理** 三角形的九点圆与任一与三角形三边都相切的圆相切.

这是初等几何中最有名的定理之一. 在 Davis[1] 一书中,对此定理有一些有趣的介绍. 应用欧几里得的传统方法,要证明这一定理自然需要高度的技巧,但即使应用解析几何,也需要一定的巧思. 参阅 Salmon [1] 一书第 127 页上的证明.其中要用到三角函数,因而是作为常用几何的一条定理来证明的. 事实上,上面定理的叙述不牵涉圆的内切与外切而只涉及圆的相切,因而是一条无序度量几何中的定理. 如果应用本章中的机械化证明方法,则证明是很容易的,与前三例并无差别. 唯一的不同是计算量大,手算既繁又易出错,应使用计算机进行证明. 现将证明过程述之如下.

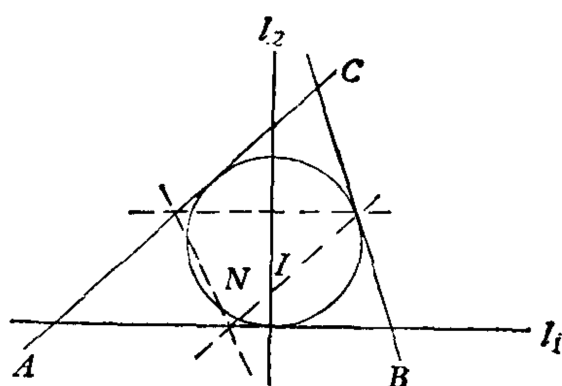


图 4.4

依第二章 2.4 节, 一三角形 ΔABC 应有四个圆与三边都相切. 任取其一并命其中心为 I. 今取 Descartes 坐标轴,以 AB 为第一轴 l_1, 过 I 与 AB 垂直的直线为第二轴, 今设各点的坐标如下:

$$I=(0,x_1)\quad A=(x_2,0)$$
$$B=(x_3,0)\quad C=(x_4,x_5)$$

设 ΔABC 边上诸点偶 (BC), (AC), (AB) 的中点各为 M_A, M_B, M_C, 则按定义 ΔABC 的九点圆即为过 M_A, M_B, M_C 三点的圆, 要证明此圆还经过其它六个有名的点是容易的. 设这

一九点圆的中心为 N，其坐标设为

$$N=(x_6, x_7)$$

又设

$$x_8^2= \text{九点圆半径距方或径方}=\overline{\overline{NM_A}} \text{ 等}$$

$$x_9^2= \text{点偶}(NI)\text{的距方，即 } \overline{\overline{NI}}$$

由于我们的几何不假定次序关系，故半径与距离都无意义而言.但如第二章 2.4 节所示，可定义圆的径方与点偶的距方，于是定理的假设部分如下:

AI 是 $\measuredangle A(BC)$ 的分角线之一，或

$AC=l_1$ 对 AI 的对称线

$$\Longleftrightarrow (x_1^2-x_2^2)x_5+2x_1x_2(x_2-x_4)=0$$

BI 是 $\measuredangle B(AC)$ 的分角线之一，或

$BC=l_1$ 对 BI 的对称线

$$\Longleftrightarrow (x_1^2-x_3^2)x_5+2x_1x_3(x_3-x_4)=0$$

$N=$ 九点圆 $M_AM_BM_C$ 的中心或

九点圆径方$=\overline{\overline{NM_A}}=\overline{\overline{NM_B}}=\overline{\overline{NM_C}}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_8^2=\left(x_6-\dfrac{x_2+x_3}{2}\right)^2+x_7^2 \\ =\left(x_6-\dfrac{x_2+x_4}{2}\right)^2+\left(x_7-\dfrac{x_5}{2}\right)^2 \\ =\left(x_6-\dfrac{x_3+x_4}{2}\right)^2+\left(x_7-\dfrac{x_5}{2}\right)^2 \end{cases}$$

今将诸 x 依下述次序排列:

$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_8 \prec x_9$$

再将上述假设中出现的多项式组进行整序，可引入非退化条件

$$x_1 \neq 0 \qquad x_2 \neq \pm x_3 \qquad x_1 \neq \pm x_2$$

并在这些条件下得到下面的一个准基列. 这里准基列的意义是序列中各多项式的初式已对前面的多项式约化，虽然本身未必约化，但对于应用 4.7 节的定理 1 来说，这已足够了.

$$A_1 \equiv (x_1^2+x_2x_3)x_4-x_1^2(x_2+x_3)=0$$

$$A_2 \equiv (x_1^2 + x_2x_3)x_5 - 2x_1x_2x_3 = 0$$

$$A_3 \equiv 4x_6 - (x_2 + x_3 + 2x_4) = 0$$

$$A_4 \equiv 4x_5x_7 - x_5^2 - (x_3 - x_4)(4x_6 - 2x_2 - x_3 - x_4) = 0$$

$$A_5 \equiv 4x_8^2 - (2x_6 - x_2 - x_3)^2 - 4x_7^2 = 0$$

$$A_6 \equiv x_9^2 - x_6^2 - (x_7 - x_1)^2$$

定理的终结部分为

$$G \equiv x_9^4 + x_8^4 + x_1^4 - 2x_9^2x_8^2 - 2x_9^2x_1^2 - 2x_8^2x_1^2 = 0$$

今再引进诸 A_i的初式不等于 0 这些非退化条件，即

$$x_1^2 + x_2x_3 \neq 0 \qquad x_5 \neq 0$$

则求得G对诸 A_i 的余式依次为 R_5, R_4, $\cdots$, R_1, R_0 如下:

$$\begin{aligned}
R_5 = {} & x_8^4 - 4x_1^2x_8^2 - 2x_7^2x_8^2 + 4x_1^2x_7^2 - 2x_6^2x_8^2 \\
& + 4x_1x_7x_8^2 + x_7^4 + 2x_6^2x_7^2 - 4x_1x_7^3 + x_6^4 \\
& - 4x_1x_6^2x_7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4 = {} & -64x_1^2x_6^2 + 64x_1^2x_2 - 64x_1x_2x_6x_7 + 64x_1^2x_3x_6 \\
& - 64x_1x_3x_6x_7 - 32x_1^2x_2x_3 + 32x_2x_3x_6^2 + 32x_1x_2x_3x_7 \\
& - 16x_1^2x_2^2 + 16x_2^2x_6^2 + 16x_1x_2^2x_7 - 16x_1^2x_3^2 + 16x_3^2x_6^2 \\
& + 16x_1x_3^2x_7 - 24x_2^2x_3x_6 - 8x_2^3x_6 - 24x_2x_3^2x_6 - 8x_3^3x_6 \\
& + 6x_2^2x_3^2 + 4x_2^3x_3 + 4x_2x_3^3 + x_2^4 + x_3^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3 = {} & -64x_1^2x_5x_6^2 + 64x_1^2x_2x_5x_6 + 64x_1^2x_3x_5x_6 \\
& - 32x_1^2x_2x_3x_5 + 32x_2x_3x_5x_6^2 - 16x_1^2x_2^2x_5 \\
& + 16x_2^2x_5x_6^2 - 16x_1^2x_3^2x_5 + 16x_3^2x_5x_6^2 - 24x_2^2x_3x_5x_6 \\
& - 8x_2^3x_5x_6 - 24x_2x_3^2x_5x_6 - 8x_3^3x_5x_6 + 6x_2^2x_3^2x_5 \\
& + 4x_2^3x_3x_5 + 4x_2x_3^3x_5 + x_2^4x_5 + x_3^4x_5 - 16x_1x_2x_5^2x_6 \\
& - 16x_1x_3x_5^2x_6 + 8x_1x_2x_3x_5^2 + 4x_1x_2^2x_5^2 + 4x_1x_3^2x_5^2 \\
& - 64x_1x_2x_3x_6^2 - 64x_1x_3^2x_6^2 + 80x_1x_2x_3^2x_6 + 49x_1x_2^2x_3x_6 \\
& + 32x_1x_3^3x_6 + 64x_1x_2x_4x_6^2 + 64x_1x_3x_4x_6^2 - 64x_1x_2x_3x_4x_6 \\
& - 48x_1x_2^2x_4x_6 - 16x_1x_3^2x_4x_6 - 20x_1x_2^2x_3^2 - 8x_1x_2^3x_3 \\
& - 16x_1x_2x_3^3 + 16x_1x_2^2x_3x_4 + 8x_1x_2^3x_4 + 8x_1x_2x_3^2x_4 \\
& - 4x_1x_3^4 - 16x_1x_2x_4^2x_6 - 16x_1x_3x_4^2x_6 + 8x_1x_2x_3x_4^2 \\
& + 4x_1x_2^2x_4^2 + 4x_1x_3^2x_4^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_2 = {} & 2x_1x_2x_3^2x_4 + 2x_1x_2^2x_3x_4 + 4x_1^2x_2x_4x_5 \\
& + 4x_1^2x_3x_4x_5 - 2x_1x_2x_4x_5^2 - 2x_1x_3x_4x_5^2 \\
& - 4x_1x_2x_3x_4^2 - 2x_1x_2^2x_4^2 + 2x_1x_2x_4^3 - 2x_1x_3x_4^3 \\
& - x_1^2x_2^2x_5 - 2x_1^2x_2x_3x_5 - x_1^2x_3^2x_5 - 2x_1x_3^2x_4^2 \\
& - 4x_1^2x_4^2x_5 + 2x_2x_3x_4^2x_5 + x_2^2x_4^2x_5 + x_3^2x_4^2x_5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_1 = {} & 5x_1^4x_2x_3^2x_4 + 5x_1^4x_2^2x_3x_4 - 6x_1^4x_2x_3x_4^2 \\
& - x_1^4x_2^2x_4^2 + x_1^4x_2x_4^3 + x_1^4x_3x_4^3 - x_1^4x_3^2x_4^2 \\
& + 2x_1^2x_2^2x_3^3x_4 + 2x_1^2x_2^3x_3^2x_4 + 2x_1^2x_2^2x_3x_4^3 \\
& + 2x_1^2x_2x_3^2x_4^3 - x_1^4x_2^3x_1 - 2x_1^4x_2^2x_3^2 - x_1^4x_2x_3^3 \\
& - 6x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2 - x_1^2x_2^3x_3x_4^2 - x_1^2x_2x_3^3x_4^2 \\
& - x_2^3x_3^4x_4 + x_2^4x_3^3x_4 + x_2^3x_3^2x_4^3 + x_2^2x_3^3x_4^3 \\
& - x_1^2x_2^4x_3^2 - 2x_1^2x_2^3x_3^3 - x_1^2x_2^2x_3^4
\end{aligned}
$$

$$R_0 = 0$$

各余式 $R_5, \cdots R_0$ 的项数依次为

$$11,\ 23,\ 45,\ 18,\ 24,\ 0$$

最后一个 R_0 的项数等于 0 意指在前述非退化条件下，G 对准基列的余式为 0，因而由上节定理 1（显然在准基列的情形也成立），Feuerbach 定理在这些非退化条件下成立.

这些非退化条件的几何意义是清楚的，已无必要就各种退化情形进行尝试，因此结论是 Feuerbach 定理 generically 成立. 或依习惯说法，简称 Feuerbach 定理成立. 这时上面的计算过程即是这一定理的一个证明.

上面的例子说明借助于现代计算机，我们的机械化证明方法足以证明颇不简单的定理. 这些定理的证明，不仅传统的欧几里得证明方式难以措手，即使是通常的解析几何方法也将因计算过于繁复而无法解决. 但是使用计算机，则在它的机器与速度的限制条件下，不论是何种定理，只要属于本章范围之内，证明起来都是轻而易举的.

我们的目的并不限于证明一些已知的定理. 由于我们已拥有一种手段，使证明定理成为易事，因而它也提供了一种手段，使我

们真正的创造力可以贯注于新定理的发现. 我们可通过各种途径试作种种推测,然后在计算机上进行验证. 如果验证属实,即获得了一条定理. 自然,这里的计算机仍然只是一种计算工具,从作用来讲,与纸笔在数学上作为计算论证的辅助工具并无差别,但在效率上却大有区别. 这种借助于计算机以发现定理的方法, 简称为**机器发明**. 下面将举出两个这样的例子.

[例 5] Pappus 线图象

所谓 Pappus 定理是说, 若两不同直线 l, l' 上各有互不相同的三点 A, B, C 与 A', B', C', 又这些点也不同于 l, l' 可能有的交点,则以下交点

$$P = AB' \wedge BA' \qquad Q = AC' \wedge CA' \qquad R = BC' \wedge CB'$$

如果存在,即相应直线不平行时, 这三点 P, Q, R 必在一直线上, 称为 Pappus 线,简记为

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{bmatrix}$$

将 A, B, C, A', B', C' 作不同的排列,则用上面的方法在相应交点都存在时, 共可得六条这样的 Pappus 线. 除上面这一条外,其它五条为

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B' & C' & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C \\ C' & A' & B' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C \\ C' & B' & A' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B' & A' & C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C \\ A' & C' & B' \end{bmatrix}$$

我们探讨由这六条 Pappus 线所构成图象的几何性质.

在无序 Pascal 几何中, 可以自然地引进代数曲线, 代数曲线的次数以及切线等派生概念. 又易知, 一般说来五条直线可与一二次曲线相切,而六条直线则须满足一定的条件(通常所谓 Brianchon 定理)才有此可能. 于是我们可进一步提出下面的问题: 上面的六条 Pappus 线是否同切于一个二次曲线?

画一些草图, 可以发现这六条线确实有可能同切于一二次曲线,不过这一二次曲线已退化成两点. 换言之, 六条 Pappus 线的

每一条都要经过两个点中的一个．把这一观察变成几何语句并作出下面的推测：

推测　上述图象中的三条 Pappus 线

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & B & C \\ B' & C' & A' \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & B & C \\ C' & A' & B' \end{bmatrix}$$

若不互相平行，即相交于同一个点．其它三条 Pappus 线也是如此．

应用我们的机械化方法并在计算机上实施，容易验证这一推测成立．由此获得了一条定理．

［例 6］**Pascal 圆锥曲线定理**

作为机器发明的又一例子，试考虑下面的问题．

设在一二次曲线上有六个点 $A_1, \cdots, A_6$，任取其中四个不同的点 A_i，A_j，A_k，A_l 并作出交点

$$P_{ij,kl} = A_iA_j \wedge A_kA_l$$

这样的交点共有四十五个（假设相应直线不平行），称为 Pascal 点．

今将六点 A_i 排成任意一个次序 $A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_6}$ 以得一六角形，则这一六角形三组对边的交点

$$P_{i_1i_2,i_4i_5} = A_{i_1}A_{i_2} \wedge A_{i_4}A_{i_5}$$
$$P_{i_2i_3,i_5i_6} = A_{i_2i_3} \wedge A_{i_5}A_{i_6}$$
$$P_{i_3i_4,i_6i_1} = A_{i_3}A_4 \wedge A_{i_6}A_{i_1}$$

在同一直线上，称为六角形 $A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_6}$ 的 Pascal 线．这样的 Pascal 线共有六十条，构成一个复杂的图象．在这四十五个 Pascal 点与六十条 Pascal 线之间，有许多有趣的几何性质，曾为不少几何学家如 Steiner, Cayley, Kirkmann, Veronese 等的探讨对象，参看 Salmon［1］一书之末的注释．然而，他们所发现的许多有趣的定理都是这些点与线之间的线性关系，即点共线或直线共点之类．因此我们提出这样的问题：在四十五个 Pascal 点与六十条 Pascal 线之间，有些什么样的二次或甚至更高次的关系？

这样的关系自然是存在的．例如，任意两条 Pascal 线上的六个 Pascal 点，即具有一个二次关系，它们位于由这两条 Pascal 线

所组成的退化二次曲线上．显然这样的二次关系是不足道的．因此，我们就最简单的情形提出下面的问题：在四十五个 Pascal 点中，有否六个点能位于一非退化的二次曲线上？

我们采用了下面的方法来考虑这一问题．

在由 1，2，···，6 所生成的对称群 S_6 中，考虑一个阶数为 6 的子群 G，例如由循环

$$g=(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$$

所生成的循环群

$$G_6=\{1, g, g^2, \cdots, g^5\}$$

今考虑任一 Pascal 点

$$P=P_{ij,kl}$$

以 G_6 中各元素 σ 作用于 P，得点

$$\sigma P=P_{\sigma(i)\sigma(j),\sigma(k)\sigma(l)}$$

试问：由 P 与 G_6 所生成的六个点

$$P, gP, g^2P, \cdots, g^5P$$

是否在同一二次曲线上？

根据 $P_{ij,kl}=A_iA_j\wedge A_kA_l$ 与 $g=(123456)$ 的相互关系，可把四十五个 Pascal 点分成十种类型，列表于下．其中第二种与最后一种实际上属于同一类型：

点 $P=A_iA_j\wedge A_kA_l$	六点 g^sP 的二次关系
$A_1A_2\wedge A_3A_4$	不存在二次关系
$A_1A_2\wedge A_3A_5$	不存在二次关系
$A_1A_2\wedge A_3A_6$	在两条 Pascal 线所成的退化二次曲线上
$A_1A_2\wedge A_4A_5$	在两条重合 Pascal 线所成的退化二次曲线上
$A_1A_3\wedge A_2A_4$	不存在二次关系
$A_1A_3\wedge A_2A_5$	？
$A_1A_3\wedge A_2A_6$	不存在二次关系
$A_1A_3\wedge A_4A_5$	不存在二次关系
$A_1A_3\wedge A_4A_6$	不存在二次关系或无意义
$A_1A_3\wedge A_5A_6$	不存在二次关系

上表中唯一不易决定的是

$$P_{13,25} = A_1A_3 \wedge A_2A_5$$

这一情形. 今应用本章的机械化方法并在计算机上实施，经验证所得六点确在同一二次曲线上，由此获得了下面的定理：

定理 设 $g = (123456)$，$P = A_1A_3 \wedge A_2A_5$，则

$$P,\ gP, \cdots,\ g^5P$$

等六点在一非退化的二次曲线上. 从不同的 g 与 P 所得这一类二次曲线有六十个.

我们所用的计算机是一种台式计算机，其每秒速度加法为三千次，计算时间用了近六十个小时. 如果改用一台每秒二、三十万次的小型计算机，不到一小时可证明完毕. 由此可见我们所用机械化方法的效率. 通过对六个点 $A_1, \cdots, A_6$ 的不同组合与排列，应能将存在于四十五个 Pascal 点之间的所有可能的非退化二次关系全部找出并加以证明而无多大困难. 甚至可以同样考虑存在其间的非退化三次关系以及其它错综复杂的关系. 这对于传统的方法(不论是综合的还是解析的)来说，几乎是无法做到的.

本节举出了若干例子，说明机械方法的作用. 自然不论是机器证明还是机器发明，都可以运用通常的传统方法. 下面是例 6 中定理的一个直接证明.

记 $P_{13,25}$ 为 A_7，又依次记 $gA_7, g^2A_7, \cdots g^5A_7$ 为 $A_8, A_9, \cdots, A_{12}$. 要证 $A_7, A_8, \cdots, A_{12}$ 等六点在同一二次曲线上，只需证明 $A_7A_8A_{11}A_{12}A_9A_{10}$ 为一 Pascal 六角形即可，而后者相当于须证明

$$A_{13} = A_7B_8 \wedge A_9A_{12} \qquad A_{14} = A_8A_{11} \wedge A_9A_{10}$$

$$A_{15} = A_{11}A_{12} \wedge A_7A_{10}$$

在同一直线上.

今依假设 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 在同一二次曲线上，因而 $A_1A_3A_6A_5A_2A_4$ 是一 Pascal 六角形，故三点

$$A_1A_3 \wedge A_2A_5 = A_7 \qquad A_3A_6 \wedge A_2A_4 = A_8 \qquad A_5A_6 \wedge A_1A_4$$

在一直线上. 换言之，$A_5A_6 \wedge A_1A_4$，即为 A_{13}.

同样从 $A_1A_2A_5A_3A_6A_4$ 是 Pascal 六角形可知，$A_1A_2 \wedge A_3A_6$

$=A_{14}$，而从 $A_1A_5A_2A_6A_3A_4$ 是 Pascal 六角形知 $A_2A_5\wedge A_3A_4=A_{15}$.

最后从 $A_1A_2A_5A_6A_3A_4$ 是 Pascal 六角形即得 A_{13}，A_{14}，A_{15} 在一直线上，故知 A_7，A_8，$\cdots$，A_{12} 在同一二次曲线上．如所欲证．

上述证明简明而直观，充分体现了传统纯几何证法的特色．但是，正如 Deseartes 所指出的那样，每一个这样的证明都需要一番巧思，个别的定理需要个别的证明，也就需要个别的巧思．机器证明则恰好与之相反，只需在理论上证明某一类定理或某一种几何可以机械化并给出机械化方法，则不论是这一类中的哪一个定理，其证明都将是一样的，无分难易，且在机器的容量、速度等许可的范围内，都可在机器上付诸实施，无需作任何其它的考虑．在这里，机器证明与传统证明的关系类似于代数与算术方法之间的关系．以所谓鸡兔共笼这一四则问题为例，算术方法假设鸡有四足或兔有两足，可谓极尽巧思之能事．解法也生动美妙，引人入胜．相反代数方法(即我国古代的天元术)是机械而枯燥乏味的，但它对整个一大类问题都切实可行，而不是仅适用某一个别问题．在开始时，代数方法或天元术的创立还只是针对着某一类问题以求“省功数倍”而已，但发展至今，其作用已是人所共知的．

补注 作者在 HP1000 小型计算机上依据本书所述的机械化方法编成程序并作了一些试验，其中包括机器发明的实例，现介绍如下：

1．反倾中心定理与反倾中心线定理．

在平面上固定一直线 l，则两直线 l_1，l_2 若与 l 所成的角互补时，即称 l_1，l_2（对 l）反倾．

定理 1 过任一三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三个顶点各作对边的反倾直线必相交于一点，这一点称为 $\triangle A_1A_2A_3$（对 l）的反倾中心．

定理 2 任一完全四边形所定四个三角形的四个反倾中心必同在一直线上．

这两个定理在 HP 1000 上证明所需的运行时间各为一分多钟与四分多钟．

2．本节例 5 的 Pappus 点定理．

Pappus 点定理在 HP 1000 上证明的机器运行时间约为三十三分钟．

这一定理系在 1980 年时发现并在 HP 9835A 上证明的．当时曾有打印记录，但未录下运行时间，大约为二十小时左右．

3．本节例 6 的 Pascal 圆锥曲线定理．

在 HP 1000 上证明的机器运行时间约为一小时二十三分钟．

这一定理也是在 1980 年时发现并在 HP9835A 上证明的．当时也有打印记录，且其证明所需时间为六十小时左右．

以上三定理在 HP 1000 机上的证明过程都有较详细的打印记录．

又补注 由于在机器操作中计算过程在屏幕上详细显示，故以上列举的时间远远超过实际的 CPU 时间. 我国现在美国 Texas 州 Austin 大学攻读博士学位的周咸青(S. C. Chou) 同志已依我们的方法编成程序在 Dec-20 机上实施，证明了 150 个常用几何中的定理，并发明了一些有趣的定理，下面是其中之一:

作一三角形外接圆的同心圆，在此圆上任一点作三角形三边的垂线，其垂足所成三角形的面积是一常数. 在同心圆即是外接圆自身时，这一常数是 0，即三垂足在一直线上，也即通常的 Simson 定理.

周的论文〈Proving Elementary Geometry Theorems Using Wu's Algorithm〉见美国数学会编的 Comtemporary Mathematics 一书，此书将于 1984 年出版.

第五章 （常用）有序几何的机械化定理

5.1 有序几何定理证明机械化概述

在前两章中，所考虑的几何不假定任何次序关系，例如无序的 Pascal 几何、垂直几何等．对于这一类几何，在采取坐标系统后，定理的叙述仅牵涉到一些等式关系．我们已提出了机械化的证明方法．这种方法，通常是甚为有效的，可用以证明颇不简单的定理．实践将说明此种方法对于无序几何的有效程度．在计划缮写的《几何定理机器证明的理论、方法与实践》一书中，将详细说明这种方法的具体步骤、程序编制以及在计算机上的实践，并将举出很多实例．本书则仅局限于基本原理这一部份．若几何假定了某种次序关系，而定理的叙述、特别是终结部分又牵涉到这种次序关系时，情况就不仅要复杂得多，而且还将有本质上的不同．这时在理论上虽然也有机械化的证明方法，但效率是不高的，目前似乎还难以据之证明较不简单的定理．

在本书第一、二两章中，曾提到过以下几种有序几何：

1．有序 Pascal 几何——即在第一章所定义的 Pascal 几何中添入次序关系并满足 Hilbert 次序公理 HII 的几何．

2．有序垂直几何——见第二章．

3．有序度量几何——见第二章．

4．常用几何——即第一章 1.1 节中具有 Hilbert《几何基础》中所提到的关联、次序、全合、平行那些基本关系并满足所有五类公理 HI-HV 的那种几何，文献中通常称为欧几里得几何．

为简单起见，上述任一类型的有序几何都称为**通常有序几何**．本章中有时还将**通常**两字略去而简称为**有序几何**．

每一种有序几何附属数域都是一个有序域，特别是常用几何

的附属数域即为通常的实数域．这些几何的定理证明机械化问题，有赖于附属数域关于次序方面的性质．为此先对有序域作一简单概括如下，详细论证可参阅 Van der Waerdeu [1] 第十章或[2]第九章，Artin [1] 第一章第 9 节，Jacobson [1] 第五章，以及 Artin-Schreier [1] 原文． 又因所考虑的几何无限公理都成立，故相应的附属数域的特征都是 0，对此不再作说明．

定义 1 数域**K**称为一有序域，如果**K**中除 0 以外的数可分成两部分 $\mathbf{K}^+$ 与 $\mathbf{K}^-$，满足以下性质：

1．若 $a \in \mathbf{K}^+$，则 $-a \in \mathbf{K}^-$． 反之，若 $a \in \mathbf{K}^-$，则 $-a \in \mathbf{K}^+$．

2．若 $a, b \in \mathbf{K}^+$，则 $a + b \in \mathbf{K}^+$，且 $ab \in \mathbf{K}^+$．

对于一个有序域 **K**，$\mathbf{K}^+$ 中的数称为**K**中的正数，$\mathbf{K}^-$中的数称为**K**中的负数．若 $a - b \in \mathbf{K}^+$，则记成 $a > b$ 或 $b < a$，又记 a 的绝对值为 $|a| = 0$，a 或 $-a$，视 $a = 0$，$a \in \mathbf{K}^+$，或 $a \in \mathbf{K}^-$ 而定．

从定义可知，在一有序域中，其整数与有理数都保持了通常的次序关系，例如 $+1$ 为正数，-1 为负数．

定义 2 数域**K**称为一形式实域，如果**K**中任意有限多个数的平方之和都不等于-1．

定义 3 数域**K**称为一实闭域，如果**K**是一形式实域，而任一**K**的代数扩域只需不与**K**相同，即不是形式实域．

定义 4 有序域**K**上的一个多项式

$$f = f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{K}[x_1, \cdots, x_n]$$

称为是正定的(或半正定的)，如果对 **K** 中的任意数 $a_1, \cdots, a_n$，都有

$$f(a_1, \cdots, a_n) > 0 \ (\text{或}\ f(a_1, \cdots, a_n) \geqslant 0)$$

如果$-f$是正定的(或半正定的)，则称 f 是负定的(或半负定的)．

以下是有序域方面对于几何机械化要用到的一些主要结果．

定理 1 一个非形式实域不可能引进次序，使之成为一有序域．反之，任一形式实域至少可引进一种次序使之成为一有序域．

定理 2 若**K**是有序域，则有一且除等价的扩张外只有一实

闭的代数扩张 $\bar{\mathbf{K}}$，使 $\bar{\mathbf{K}}$ 中保持了 $\mathbf{K}$ 中的次序，即，$a, b \in \mathbf{K}$ 而在 $\mathbf{K}$ 中 $a < b$，（或 $a > b$，$a = b$）时，作为 $\bar{\mathbf{K}}$ 中的元素仍同样有 $a < b$（或 $a > b$，$a = b$）。

定理 3 有理数域 $\mathbf{Q}$ 只有一唯一确定的次序，使整数保持通常的次序而成为一有序域，且 $\mathbf{Q}$ 上有一且除去同构外只有一实闭的代数扩张域。

定理 4（Rolle 零点定理） 设 $\mathbf{R}$ 是实闭域，$f(x) \in \mathbf{R}[x]$ 是 $\mathbf{R}$ 上的多项式，若 $a, b \in \mathbf{R}$，而 $f(a) < 0$，$f(b) > 0$，则在 $\mathbf{R}$ 中必有一数 c，在 a，b 之间使 $f(c) = 0$。

作为定理 4 的推论有下面的定理。

定理 5 设 $\mathbf{R}$ 是实闭域，则

1. $\mathbf{R}$ 中任一正数恰有两平方根，其绝对值相等而符号相反。

2. $\mathbf{R}$ 上任一奇次多项式方程 $f(x) = 0$，至少在 $\mathbf{R}$ 中有一个根。

对于一个实闭域来说，有下面的定理。

Sturm 定理 设 $\mathbf{R}$ 是实闭域，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上次数大于 0 的多项式，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的形式导数，作 $f(x)$ 的 Sturm 序列

$$S = \{f_0(x), f_1(x), \cdots, f_s(x)\}$$

其中用辗转相除法得

$$f_0(x) = f(x) \qquad f_1(x) = f'(x)$$

$$f_2(x) = q_1(x)f_1(x) - f_0(x) \qquad \deg f_2 < \deg f_1$$

$$\cdots$$

$$f_{i+1}(x) = q_i(x)f_i(x) - f_{i-1}(x), \ \deg f_{i+1} < \deg f_i$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$f_{s+1}(x) = q_s(x)f_s(x) - f_{s-1}(x) = 0$$

对于任一 $c \in \mathbf{R}$，而 $f(c) \neq 0$，命 $V(c)$ 为序列

$$\{f_0(c), f_1(c), \cdots, f_s(c)\}$$

中的符号变化数。当 $f(a) \neq 0$，$f(b) \neq 0$，$a, b \in \mathbf{R}$，而 $a < b$ 时，$f(x) = 0$ 在区间 (a, b) 上不同根的个数等于 $V(a) - V(b)$。

定理 5 中的 1 和 2 是作为实闭域的两条特征性质。事实上，

有的著作也称满足 1 和 2 两性质的有序域为实闭域，而 Sturm 定理的证明也只依赖于这两性质，请参阅 Jacobson [1]及 5.2 节.

与实数域、复数域间的关系相仿，有下面的定理.

定理 6 一个实闭域$\mathbf{R}$在添加了$\sqrt{-1}$ 这一代数元素后所得的代数扩域$\mathbf{R}(\sqrt{-1})$是代数闭的. 反之，若一形式实域$\mathbf{R}$在添加了$\sqrt{-1}$后成一代数闭域，则$\mathbf{R}$是实闭域.

由这一定理知任一实闭域$\mathbf{R}$上的方程 $f(x)=0(f(x)\in\mathbf{R}[x])$ 的根都在$\mathbf{R}(\sqrt{-1})$中. 如果这些根本身就已不在$\mathbf{R}$中，则将成对地以 $a\pm b\sqrt{-1}$ 互相共轭的形式出现，这里 $a, b\in\mathbf{R}$. 根的对称函数也可以构造性地通过对 $f(x)=0$ 的系数计算而得，这与通常的情形相同.

今设$\mathbf{K}$是一有序域. 则$\mathbf{K}$中数之间的不等式关系可从某些方程是否有解的存在关系导出. 这里有解意指在$\mathbf{K}$中有解，下面不再另作说明. 例如，若设 a, b 等为$\mathbf{K}$中的数，而 x, y 等为变量，则

$$ax^2=1\ (\text{在}\ \mathbf{K}\ \text{中})\text{有解}\Rightarrow a>0$$

$$ax^2=-1\cdots\cdots\cdots\cdots\Rightarrow a<0$$

$$x^2=a\cdots\cdots\cdots\cdots\Rightarrow a\geqslant 0$$

$$x^2=-a\cdots\cdots\cdots\cdots\Rightarrow a\leqslant 0$$

$$abx^2=1\cdots\cdots\cdots\cdots\Rightarrow a,b\ \text{同号，即}\neq 0\ \text{且同为正或同为负}$$

$$abx^2=-1\cdots\cdots\cdots\cdots\Rightarrow a,b\ \text{异号}$$

$$ax=1\cdots\cdots\cdots\cdots\Rightarrow a\neq 0$$

如果$\mathbf{K}$不仅是有序域且是一实闭域或满足 1 和 2 两性质的有序域，则上面诸式不仅是导出关系而且是等价关系. 这时，数的不等式关系完全可转化为方程有解与否的存在关系.

今设任意一种如本节开首所说的有序几何，这种几何的附属数域将是一有序域$\mathbf{K}$. 在取定适当坐标系统后，这种几何中如关联、平行、垂直等基本关系就都用坐标间的等式关系来表达，但另一种关于次序的基本关系，则须用坐标间的不等式关系来表达. 试依第三章 3.3 节所述略举数例如下:

［例 1］ 对位于同一直线上的三点

$$A_1 = (a_1, a_4) \qquad A_2 = (a_2, a_5) \qquad A_3 = (a_3, a_6)$$

点 A_2 在 A_1, A_3 之间这一次序关系可表示为

$$a_1 < a_2 < a_3 \text{ 或 } a_1 > a_2 > a_3 \text{ 或 } a_4 < a_5 < a_6 \text{ 或 } a_4 > a_5 > a_6$$

或

$$(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) < 0 \text{ 或 } (a_5 - a_4)(a_5 - a_6) < 0$$

因而依前述这一次序关系可从以下方程的有解性质导出:

$$(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)x^2 = -1 \text{ 有解}$$

或

$$(a_5 - a_4)(a_5 - a_6)x^2 = -1 \text{ 有解}$$

这里的有解是指在 **K** 中有解．如果 **K** 本身是实闭域，则 A_2 在 A_1, A_3 之间的几何事实即与上述方程的有解等价．

如果直线用参数方程表示，而参数为 t, A_i 各相当于 $t = t_i$，则 A_2 在 A_1, A_3 之间的次序关系可表示为一个不等式关系

$$(t_2 - t_1)(t_2 - t_3) < 0$$

因而可从一个方程

$$(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)x^2 = -1$$

的有解性导出或与之等价．

［例 2］ 两点 $A = (a_1, a_2)$, $A' = (a_1', a_2')$ 在一直线

$$l: L(x_1, x_2) \equiv c_1x_1 + c_2x_2 + c_3 = 0$$

的同侧(或异侧)．这一几何关系相当于

$$L(a_1, a_2) = c_1a_1 + c_2a_2 + c_3$$

与

$$L(a_1', a_2') = c_1a_1' + c_2a_2' + c_3$$

符号相同(或相反)．因而可从方程

$$(c_1a_1 + c_2a_2 + c_3)(c_1a_1' + c_2a_2' + c_3)x^2 = +1 \quad \text{(同侧时)}$$

或

$$(c_1a_1 + c_2a_2 + c_3)(c_1a_1' + c_2a_2' + c_3)x^2 = -1 \quad \text{(异侧时)}$$

在 **K** 中有解这一性质所导出．在 **K** 为实闭域时，则 A, A' 是否在 l 同侧或异侧，与前一或后一方程是否有解等价．

今考虑上述有序几何中的任一定理，并设几何附属数域为$\mathbf{K}$，而以$\bar{\mathbf{K}}$为$\mathbf{K}$的一个实闭代数扩域. 在适当坐标系统下，这一定理的假设与终结部分都将用一些$\mathbf{K}$中的等式或不等式关系来表达. 如果我们在诸点坐标之外引进一些新的变量，则依前面所述，这些不等式关系都可用这些新变量的多项式方程在$\bar{\mathbf{K}}$中有解的关系来代替. 这时可根据终结部分是等式还是不等式的关系而把定理分成两类. 如果定理的终结部分不牵涉到次序关系，因而可用$\mathbf{K}$中通常的等式关系来表达，且这些等式中的变量都是原来的坐标变量时，这种定理称为**等式型定理**，否则称为**不等式型定理**. 例如在常用几何中，下述定理即是一等式型定理.

定理 7 在一三角形的各边上向外侧各作等边三角形，则将原三角形各顶点与对边上等边三角形对面顶点相连所得的三直线必相交于一点.

在这一定理中，假设部分牵涉到次序关系，而终结部分则只与关联关系有关.

再考虑下一定理.

定理8 三角形的九点圆与内切圆相内切而与旁切圆相外切.

由于圆的内外切牵涉到次序关系，因而这是一条不等式型定理. 但如果我们不要求证明九点圆与内旁切圆内切或外切，而只要求证明其相切，则终结即不再牵涉到次序关系. 如果九点圆与内旁切圆的半径各以R与r来表示，九点圆心与内旁切圆心的距离用d来表示，则两圆的相切关系将用下面的等式来表达:

$$R^4+r^4+d^4-2R^2r^2-2R^2d^2-2r^2d^2=0$$

因而这时的定理乃是一个等式型定理.

这样的定理在初等几何中不胜枚举，一般说来，由于角的概念在无序几何中不存在或至少不确定，两条交线的分角线有两条而无法区别，因而凡涉及角及分角线的定理时，往往会有上面的情形发生.

对于一个等式型定理，在引入若干新变量后，原来的假设部份将表示成在$\bar{\mathbf{K}}$中新旧变量之间的等式关系，而终结部份则是原来

那些变量之间的等式关系，其系数不仅在 $\overline{\mathbf{K}}$ 中且在原来未经扩充的数域 $\mathbf{K}$ 中(实际上都可取为整系数). 这时定理的代数形式将取第四章 4.1 节中的那种形式：从某一数域上某些变量的一组多项式关系推出在同一数域这些变量(事实上是假设中变量的一部份)的另一多项式关系，而且这些多项式的系数事实上都可取为整数. 于是，依据这一章的方法即可得下述定理.

机械化定理 1　任一(通常)有序几何的等式型定理有机械化证法.

对于不等式型的定理，情况就完全不同. 命定理假设部份中的变量为 $x_1, \cdots, x_m$，则定理的终结部份是一 $x_1, \cdots, x_m$ 间的不等式关系. 在引入又一新变量设为 y 后，这一不等式关系等价于一个 y 的方程

$$g(y, x_1, \cdots, x_m) = 0$$

在实闭域 $\overline{\mathbf{K}}$ 中是否有解的问题. 这是一个方程解的**存在问题**，与在等式型定理导致到等式间相互推演，即所谓**公式演化**一类的问题上有本质的区别，两者的处理方式也有着本质的区别. 在将不等式型定理的假设部份引进一些新变量以转化成 $\overline{\mathbf{K}}$ 中的等式关系，并设新旧变量为 $x_1, \cdots, x_n$ 后，定理将转化成下面形式的代数问题：

设有序域 $\mathbf{K}$ 与 $\mathbf{K}$ 上变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的多项式组

$$\Sigma = \{f_i(x_1, \cdots, x_n)\}$$

其中 f_i 只有有限多个. 又设另一变量与另一 $\mathbf{K}$ 上的多项式方程

$$g(y, x_1, \cdots, x_n) = 0$$

试寻求一机械化方法，以判断对 $\mathbf{K}$ 或 $\overline{\mathbf{K}}$ 中任意满足诸方程

$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0$$

的数 $a_1, \cdots, a_n$，方程

$$g(y, a_1, \cdots, a_n) = 0$$

在 $\overline{\mathbf{K}}$ 中是否恒有解答.

答案是正面的，即所谓 Tarski 定理. 其证明和方法将在下节中讨论. 由此即得下面的定理.

机械化定理 2　任一通常有序几何的定理都有机械化证法.

需着重指出的是：这里不论是机械化定理 1 还是 2，都不能包括第五章甚至第四章的机械化定理. 这是因为这里的机械化定理只适用于真正有序的几何，因而附属数域**K**必须是有序域. 但在第五章或第四章中的机械化定理所适用的几何不必有次序关系甚至不必有可能引进次序关系. 例如在垂直几何中，迷向线存在或复几何的情形即是如此. 因而第四、五章与本章的机械化定理彼此不相统属，而且在两种机械化方法都适用的那种几何与定理中，即互相交叉的部份，第四、五章中的方法与本章的方法完全不同，且前者要比后者有效得多.

5.2 Tarski 定理与 Seidenberg 方法

上节指出，有序几何的不等式型定理在适当坐标系统下可化为一纯代数问题，而这一问题可依 Tarski 定理得到解决. 但不论是 Tarski 原来的方法或是其后的 Seidenberg 简化都是极其复杂的. 这些方法不仅难见实效，而且所得解答也不能完全符合几何上的要求，故以下将先把这一代数形式的问题转化成其它形式再依加以修改后的 Tarski-Seidenberg 方法来处理. 为此先重述上节末的代数问题如下. 凡提到多项式时，若非另有声明都将假定是整系数多项式，凡多项式组都将假定只有有限多个多项式，这些都不再作说明.

代数问题 1

设$\overline{\mathbf{K}}$是实闭域，又设一多项式组

$$\Sigma=\{f_i(x_1,\cdots,x_n)\}$$

与一多项式 $g(y,x_1,\cdots,x_n)$，而在 g 中 y 真正出现，求判定从

假设：　　$f_i(x_1,\cdots,x_n)=0\qquad f_i\in\Sigma$

导出

终结: $$g(y, x_1, \cdots, x_n) = 0$$
在 $\overline{\mathbf{K}}$ 中是否有解的机械化方法.

详言之,当对任意 $a_k \in \overline{\mathbf{K}}$, $k = 1, \cdots, n$ 方程 $g(y, a_1, \cdots, a_n) = 0$ 都有解时,相应的几何定理成立. 若有 a_k 使上方程无解,则相应的几何定理至少对于 $x_k = a_k$ 这种情形不成立.

由于我们只需考虑几何定理的非退化 (generic) 情形,可把退化情形置诸不论. 因为,退化情形或无几何意义,或甚至不成立,故我们真正需要解决的代数问题与上面问题 1 并不完全一致. 实质上的问题在于求得一组非退化条件
$$\Delta = \{D_1, \cdots, D_r\}$$
其中 D_i 也是 $x_1, \cdots, x_n$ 的整系数多项式,使得在
$$D_i \neq 0 \qquad (D_i \in \Delta)$$
的附加条件下来判定 $g = 0$ 是否有解即可. 这一形式的代数问题解决起来不仅比原来的问题 1 简单得多,而且还符合几何要求的实际情况.

其次,上面的终结多项式 $g(y, x_1, \cdots, x_n)$ 并不是任意的,而系依据几何定理的原意从某一多项式不等式
$$h(x_1, \cdots, x_n) > 0 \text{ 或 } < 0$$
经引入新变量 y 后转化而来,即
$$g = y^2 h \mp 1$$
其中在 $h > 0$ 时取一号, $h < 0$ 时取+号. 我们将不从正面证明定理成立(在若干非退化条件下),而将证明其反面的定理不成立,即证明下述方程与不等式关系的组
$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0 \qquad (f_i \in \Sigma)$$
$$h(x_1, \cdots, x_n) \leqslant 0 \qquad \text{或} \geqslant 0$$
在 $\overline{\mathbf{K}}$ 中无解. 换言之,若引入新变量 z, 并置
$$g(z, x_1, \cdots, x_n) = z^2 \pm h(x_1, \cdots, x_n)$$
其中取+或一号视 $h \leqslant 0$ 或 $\geqslant 0$ 而定. 原来定理成立的证明相当于证明方程组
$$f_i(x_1, \cdots, x_n) = 0 \qquad (f_i \in \Sigma)$$

$$g(z, x_1, \cdots, x_n) = 0$$

在若干附加条件下在$\overline{\mathbf{K}}$中无解.

今依 Seidenberg, 置

$$F(z, x_1, \cdots, x_n) = \Sigma f_i^2 + g^2$$

由于$\overline{\mathbf{K}}$是实闭域，在$\overline{\mathbf{K}}$中方程组有解与否和 $F=0$ 有解与否相同,又如前从几何上只需考虑非退化情形即可,故最后导致下面的问题:

代数问题 2

设实闭域$\overline{\mathbf{K}}$与变量 $z, x_1, \cdots, x_n$ 以及一多项式

$$F(z, x_1, \cdots, x_n)$$

求一机械化方法,使在有限步下能求得一组 $x_1, \cdots, x_n$ 的多项式

$$\Delta = \{D_1, \cdots, D_r\}$$

并能据之以判定方程与不等式关系式组

$$F(z, x_1, \cdots, x_n) = 0$$

$$D_i(x_1, \cdots, x_n) \neq 0 \qquad (D_i \in \Delta)$$

在$\overline{\mathbf{K}}$中是否有解.

如果判定的结果无解,则原来的几何定理在非退化条件$D_i \neq 0$ 下成立. 否则在同样的非退化条件 $D_i \neq 0$ 下原来的几何定理不成立. 对于 D_i 应限制为 $D_i = 0$ 不能从 $F=0$ 推出,参见第四章 4.1 节.

Tarski-Seidenberg 的方法虽可用以解决比较一般的代数问题 1，但并不完全适用于几何定理的证明. 如果局限于代数问题 2，则方法可简化许多而与几何要求相符，以致有可能证明一些真正较复杂的定理. 今说明代数问题 2 的解法如下:

解法将对变量 x 的个数 n 进行归纳,为此先引进一些符号,对形式为

$$F(z, x_1, \cdots, x_n)$$

的整系数多项式简记为

$$F_n = F_n(z, x^{(n)})$$

这里

$$x^{(n)} = (x_1, \cdots, x_n)$$

同样在 $\overline{\mathbf{K}}$ 中的一组值 $(a_1, \cdots, a_n)$ 也简记为 $a^{(n)}$，而以

$$x^{(n)} = a^{(n)}$$

表示

$$x_1 = a_1, \cdots, x_n = a_n$$

此外又设一组非退化条件

$$\Delta_n = \{D_{n1}, \cdots, D_{n,r_n}\}$$

其中 $D_{ni} = D_{ni}(x_1, \cdots, x_n)$ 都是 $x_1, \cdots, x_n$ 的非 0 整系数多项式，且每一 $D_{ni} \neq 0$ 都不能从 $F = 0$ 推出. 简记

$$\{F_n, \Delta_n\} = \Omega_n$$

我们称 Ω_n 有解，如果对 $\overline{\mathbf{K}}$ 中的任意一组 $a^{(n)}$，只需

$$D_{ni}(a^{(n)}) \neq 0 \qquad (D_{ni} \in \Delta_n)$$

方程

$$F_n(z, a^{(n)}) = 0$$

即在 $\overline{\mathbf{K}}$ 中有解. 又若 $z = c$ 是上述方程的解，则称 $(c, a^{(n)})$ 满足 Ω_n，于是有下面的定理.

定理 有一机械化方法，使对任意多项式

$$F_n = F_n(z, x^{(n)})$$

可在有限步内求得一 z 与$x^{(n-1)}$的多项式 F_{n-1} 以及有限多个 $x^{(n-1)}$ 的多项式 $D_{n1}, \cdots, D_{nr_n}$ 所成的组 Δ_n，使

$$\Omega_n = \{F_n, \Delta_n\}$$

之是否有解，将视

$$\Omega_{n-1} = \{F_{n-1}, \Delta_n\}$$

之是否有解而定.

依据这一定理即可解决代数问题 2. 盖从多项式 $F_n = F_n(z, x^{(n)})$ 出发，可依定理得 F_{n-1} 与 Δ_n，从 F_{n-1} 又得 F_{n-2} 与Δ_{n-1}，依次类推，最后得一多项式 $F_0(z)$. 今将历次所得

$$\Delta_n, \Delta_{n-1}, \cdots, \Delta$$

合并为一多项式组 Δ，则

$$\Omega = \{F_n, \Delta\}$$

之有解与否，将视

$$F_0(z) = 0$$

之是否有解而定，而后者可依 Sturm 定理来判断．因此，在几何附属数域为实闭域时，有一机械化方法可从 $F_n = F_n(z, x_1, \cdots, x_n)$ 得出一组非退化条件的多项式 $\{D_i\} = \Delta$，并在这些非退化条件 $D_i \neq 0$ 下判定 $F_n = 0$ 是否有解，由此判定在这些非退化条件下相应几何是否成立．换言之，相应几何的定理证明可以机械化，或相应几何的机械化定理成立．

定理解决了代数问题 2，也解决了相应的几何问题． 对我们来说特别应该一提的是：我们的主要兴趣在于希望能**正面证明**某些定理，而不在于反面否定某些定理．对于前者，只需证明最后所得 $F_0 = 0$ 在 $\overline{\mathbf{K}}$ 中无解，则对于原来的多项式 F_n 至少在某些非退化条件下方程 $F_n = 0$ 在 $\overline{\mathbf{K}}$ 中无解，于是在原来的几何附属数域中更不能有解．因而即使我们的几何附属数域并不是实闭的，但只需是有序域，即可取它的扩充实闭域，并应用上述结论，据此以提供一组非退化条件并**正面证明**在这些非退化条件下定理成立，这就是我们的主要目的所在．至于在最后所得方程 $F_0 = 0$ 有解的情形下，则虽然只在实闭域时可以得知定理不成立，而在一般的有序几何附属数域时并不能据之以得出定理不成立的结论，但这本来就不是我们所关心的问题，因而无关紧要．就我们所感兴趣的方面来说，以上方法导出的结果对我们已足够了．

定理的证明将依据 Seidenberg 的简化证法，参见 Seidenberg [1] 与 Jacobson [1] 第五章．以下将作概括介绍，主要说明原证上应该修改之处．

Seidenberg 关于定理的证明，主要依据下面引理中所说的几何事实：

Seidenberg 引理 设 Descartes 坐标系的坐标为 (x, y)，又设一曲线

$$C: f(x, y) = 0$$

其中 f 为实闭域 $\overline{\mathbf{K}}$ 中的多项式，若 C 有坐标在 $\overline{\mathbf{K}}$ 中的点或 $f=0$ 在

$\mathbf{K}$ 中有解，则在这样的点中必有一点 (a, b) 离原点的距离为最短，且若 (a, b) 既非原点又非 C 的奇点时，在该点处曲线 C 与过该点的圆

$$S: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

彼此相切.

由于我们也需考虑较一般的有序几何，例如有序 Pascal 几何，其中不一定有垂直与其它度量概念，所谓 Descartes 坐标、圆和距离等在这种几何中并无意义可言，因而不能直接应用 Seidenberg原证，虽然如此，我们只需把概念作适当修改，引理仍能成立，原证明也仍能适用，述之如下.

假设在有序几何中任一以 (x, y) 为坐标的坐标系 Γ，这里坐标系是任意的，因而无所谓圆与距离等等. 但某些概念仍可保持通常的意义. 例如设由一个方程

$$f(x, y) = 0$$

所定义的曲线 C，这里 f 不妨设为整系数多项式. 若 a, b 都在 $\overline{\mathbf{K}}$ 中，而 $f(a, b) = 0$，则称 $P(a, b)$ 为C上的点，今置

$$\alpha = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} \qquad \beta = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}$$

若 $P(a, b)$ 是 C 上的点，而

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 0$$

则 P 称为 C 的一个奇点. 若 P 是 C 上的点但非奇点，则方程

$$\alpha(x - a) + \beta(y - b) = 0$$

定义了一直线，称为 C 在 P 点的切线. 这些定义在任意坐标系统下都有意义，也与通常的概念相同. 但与通常情形不同，虽然在所考虑的几何中并无垂直概念，我们仍将称直线

$$\beta(x - a) = \alpha(y - b)$$

为坐标系统 Γ 下 C 在 P 点的"法线". 自然，这里的"法线"是相对于所取的坐标系统 Γ 而说的. 同样，任一方程 $(r \geqslant 0)$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

称为定义了这一坐标系统 Γ 下的一个以 r 为"半径"，原点为"中

心”的“圆”，一个点(a, b)称为在“圆”内，在“圆”上，或在“圆”外，视

$$a^2+b^2<r^2,\ =r^2 \text{ 或 } >r^2$$

而定．又对于任一点 $P_0=(x_0, y_0)$，在$\overline{\mathbf{K}}$中有一大于等于0的数r_0，使 $r_0^2=x_0^2+y_0^2$，该数r_0称为P_0与“圆”中心$(0, 0)$的“距离”．

今设点 $P=(a, b)$ 是曲线C与“圆”

$$S: x^2+y^2=r^2$$

的交点，这里

$$r^2=a^2+b^2$$

且 $r \geqslant 0$ 为S的“半径”．设P非C的奇点，而置

$$c=b\alpha-a\beta$$

$$d=-a\alpha-b\beta$$

则移置坐标系统使新原点为P，新坐标轴 l_1'，l_2' 为C在P点的切线与“法线”，而新坐标为 x'，y' 时，将有

$$x'=\beta(x-a)-\alpha(y-b)$$

$$y'=\alpha(x-a)+\beta(y-b)$$

于是“圆”S在新坐标系统Γ'下的方程为

$$(x'-c)^2+(y'-d)^2=c^2+d^2$$

这里

$$c^2+d^2=(\alpha^2+\beta^2)(a^2+b^2)$$

由于$\overline{\mathbf{K}}$是实闭域，故有$\gamma \in \overline{K}$，使 $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$，且 $\gamma \geqslant 0$．因而置 $r'=r\gamma \geqslant 0$ 时，S的新方程为

$$(x'-c)^2+(y'-d)^2=r'^2$$

我们称之为新坐标系统Γ'下以(c, d)为“中心”，$r' \geqslant 0$ 为“半径”的一个“圆”．同样可定义“在圆上”，“在圆内”，“在圆外”，以及一点与“中心”的“距离”等．

这样，相对于某些固定的坐标系统，仍可定义圆、半径、距离等等概念，于是原来的 Seidenberg 引理，在这些相对概念下仍然成立，原来的证明也仍然适用． 详细的论证可参阅 Jacobson [1] 一书的第五章第5节，这里不再重复．

对 Tarski-Seidenberg 原证的另一需要修改之处为非退化条件

的引入．例如在原证中，经常要考虑多项式的除法：设 $t_1, \cdots, t_r$ 为参数，

$$F(t, x) = u_n x^n + u_{n-1} x^{n-1} + \cdots + u_0$$
$$G(t, x) = v_m x^m + v_{m-1} x^{m-1} + \cdots + v_0$$

为两 x 的多项式，其系数 u_i, v_i 都是 $t_1, \cdots, t_r$ 的多项式．在以 G 除 F 时，原证中需要区别

$$v_m = 0 \qquad v_{m-1} = 0 \cdots v_{k+1} = 0 \qquad v_k \neq 0$$

在 $k = m, m-1, \cdots, 0$ 时的各种情形进行处理． 但在我们修改的证明中，只需考虑

$$v_m \neq 0$$

这一情形已足，而以 v_m 作为非退化条件添入相应的非退化集 Δ 中．在诸参数 $t_1, \cdots, t_r$ 中有一设为 t_r 处于特殊地位时，可将 v_m 视为 t_r 的多项式，而以 t_r 最高次幂的系数

$$\omega_m = \omega_m(t_1, \cdots, t_{r-1})$$

作为非退化条件添入 Δ，即在论证时只考虑

$$\omega_m \neq 0$$

这一情形．这样 Tarski-Seidenberg 的原证与方法都将大为简化．

由于 Tarski-Seidenberg 的原证及其方法在 Jacobson [1] 一书中已有详细论述，详见该书第五章第 3 至 6 诸节，我们将满足于指出简化证明对原证需要修改之处，而不再作冗长的叙述．依据前面关于机械化证明的解释，可将本章的主要结果概括成如下形式的定理．

机械化定理　与常用几何相关属并满足交线 Pascal 公理的各种有序几何，如有序 Pascal 几何、有序垂直几何、有序度量几何以及常用几何自身，其定理证明都可机械化．

5.3　有序几何定理机械化证法举例

有序几何定理证明的机械化方法与无序几何不仅有本质上的差别，而且也要繁复得多，其具体情况见前面两节．现仅就手算力

所能及的范围略举数例如下，其中结合第四章的方法进行了一些简化.

[例 1]（Pasch 公理） 作为 Pasch 公理的一个变形，试考虑下面的命题.

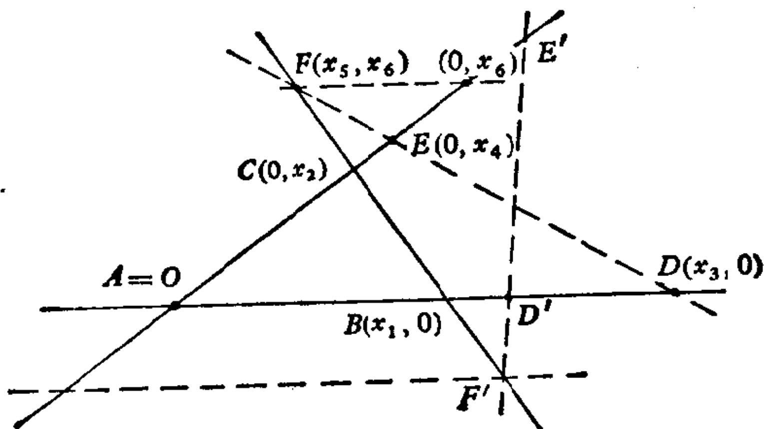


图 5.1

假设 $\triangle ABC$ 与一直线交其三边 AB，AC，BC 于 D，E，F，若 B 在 A，D 之间，C 在 A，E 之间，则 F 不能在 B，C 之间.

为简化计算手续，试取坐标系统以 A 为原点，而以 AB，AC 为两坐标轴，设各点坐标为

$$B = (x_1, 0) \qquad C = (0, x_2)$$
$$D = (x_3, 0) \qquad E = (0, x_4)$$
$$F = (x_5, x_6)$$

由次序关系的假设可知，应有 $y_1, y_2 \in \overline{\mathbf{K}}$，使

$$y_1^2 x_1(x_1 - x_3) = -1$$
$$y_2^2 x_2(x_2 - x_4) = -1$$

此外又有

$$x_2 x_5 + x_1 x_6 = x_1 x_2$$
$$x_4 x_5 + x_3 x_6 = x_3 x_4$$

将诸变量排成次序

$$y_2 \prec y_1 \prec x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec x_4 \prec x_5 \prec x_6$$

则经过整序，假设部份将为

$$y_1^2 x_1 x_3 = y_1^2 x_1^2 + 1$$

$$y_2^2x_2x_4 = y_2^2x_2^2 + 1$$
$$(x_1x_4 - x_2x_3)x_5 = x_1x_3(x_4 - x_2)$$
$$(x_1x_4 - x_2x_3)x_6 = x_2x_4(x_1 - x_3)$$

非退化条件将为

$$x_1 \neq 0 \qquad x_2 \neq 0 \qquad x_1x_4 - x_2x_3 \neq 0$$

以及

$$y_1 \neq 0 \qquad y_2 \neq 0$$

这些非退化条件的几何意义是很显然的，而且由于定理假设都已自然满足．在这些非退化条件下所要求证的定理终结部分相当于

$$g_1 \equiv x_5(x_5 - x_1) > 0$$
$$g_2 \equiv x_6(x_6 - x_2) > 0$$

试证 $g_2 > 0$ 如次．先利用假设消去 x_6 得

$$(x_1x_4 - x_2x_3)^2g_2 = x_2^2x_3x_4(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)$$

再利用前两个假设，消去 x_3, x_4 得

$$\begin{aligned} & y_1^4y_2^4x_1^2(x_1x_4 - x_2x_3)^2g_2 \\ & \quad = (y_1^2x_1^2 + 1)(y_2^2x_2^2 + 1) \\ & \quad > 0 \end{aligned}$$

由此即得 $g_2 > 0$。

在证明最后一步

$$(y_1^2x_1^2 + 1)(y_2^2x_2^2 + 1) > 0$$

中，自然可依 Tarski-Seidenberg 方法机械地进行，但这将是极为繁复的．同样，定理也可以改为证明某些方程有无 $\overline{\mathbf{K}}$ 中的解答来进行．

［例 2］几何悖论　欧几里得的《几何原本》，乃是历史上按公理体系编写的典范著作．但是它的公理系统却是残缺不全的，历来都受到指摘，而以平行公理的独立性为议论的集中所在．在 19 世纪的下半世纪，随着数学批判思潮的兴起，对欧几里得的公理系统开始作较全面的分析，而不再局限于平行公理．这时出现了一些几何悖论，下面是较著名的一个．

悖论　任意三角形都是等腰三角形.

证　设三角形 ABC，如图 5.2，作 C 角的分角线与对边 AB 的垂直平分线交于 D. 作 $DE\perp AC$，$DF\perp BC$，则由全合三角形可得

$$CE = CF \qquad AE = BF$$

由此即得 $AC = BC$. 故任意三角形 ABC 都是等腰三角形.

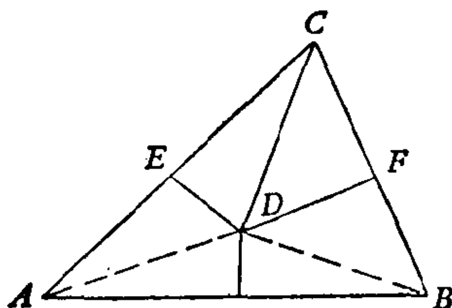


图　5.2

关于上面的悖论及其证明可参阅 Klein [4]，第 202 页或 Kline [1]第 1007 页，证明中的错误是因为图形中 D 点应在 $\triangle ABC$ 之外而不应在 $\triangle ABC$ 之内. 这可由次序公理的引入来证明，而在《几何原本》中完全没有考虑次序关系. 详言之，应有以下命题.

设 $\triangle ABC$，D 是 C 角的分角线与对边 AB 垂直平分线的交点. 若 CD 是内分角线，则 D 与 C 位于直线 AB 的异侧；若 CD 是外分角线，则 D 与 C 应位于 AB 的同侧.

这一命题的叙述与实际上几何定理的所有叙述同样，都只是针对非退化（generic）情形的. 例如上述命题中，若 $AB = AC$，则角 C 的内分角线将与 AB 的垂直平分线重合，而命题的叙述本身将失去意义. 故 $AB = AC$ 这一情形须排除在命题假设之外而作为命题的退化情况来处理. 对于诸如此类的非退化条件的出现与处理，传统的欧几里得证明方法是无能为力的，但我们的机械化方法则可给出系统的机械处理，参见以前各章，特别是第三章的 3.1 和 3.2 两节.

作为本章方法的说明，试证上述命题如次.

为使计算简单起见，试取 Descartes 坐标系统，以 C 为原点，C 角所考虑的分角线为第一坐标轴（这里不需要用到一角两分角线互相垂直这一定理），于是 D 在第一轴上. 设诸点坐标为

$$A = (x_1, x_2) \qquad B = (x_3, x_4)$$
$$D = (x_5, 0)$$

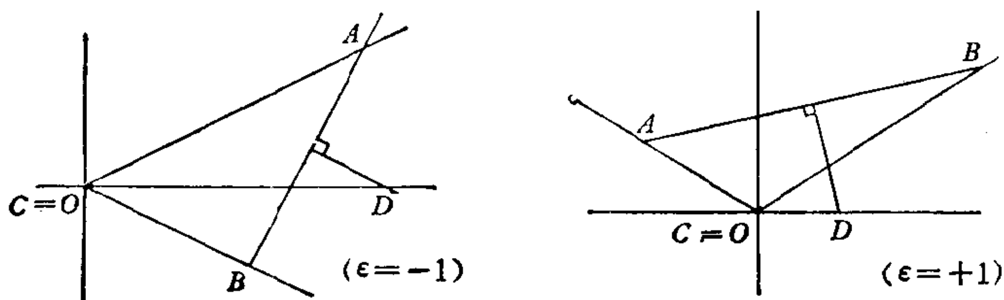


图 5.3

于是定理的假设依次为

OD 为角 C 分角线 $\Longleftrightarrow x_1x_4 + x_2x_3 = 0$

D 在 AB 垂直平分线上 $\Longleftrightarrow 2(x_3 - x_1)x_5 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$

至于 OD 为内分角线或外分角线，则相当于 A，B 在第一轴的异侧或同侧，亦即 x_2，x_4 为异号或同号，或即下方程有解：

$$x_0^2x_2x_4 = \varepsilon$$

其中

$$\varepsilon = \begin{cases} -1 & (\text{内分角线时}) \\ +1 & (\text{外分角线时}) \end{cases}$$

定理结论部分 D，C 在 AB 同侧或异侧，相当于方程

$$y^2(x_2x_5 - x_4x_5 + x_1x_4 - x_2x_3)(x_1x_4 - x_2x_3) = \eta$$

有解与否，这里

$$\eta = \begin{cases} +1 & (\text{同侧时}) \\ -1 & (\text{异侧时}) \end{cases}$$

于是定理相当于在假设成立的条件下，

$\eta = \varepsilon$ 时 y 方程有解

$\eta = -\varepsilon$ 时 y 方程无解

今对假设部分中出现的变量依以下次序排列：

$$x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec x_4 \prec x_5$$

经过整序，得假设部分为

$$x_0^2x_2^2x_3 + \varepsilon x_1 = 0$$

$$x_0^2x_2x_4 - \varepsilon = 0$$

$$2(x_0^2x_2^2+\varepsilon)x_1x_5-x_0^2x_2^2(x_1^2+x_2^2-x_3^2-x_4^2)=0$$

最后一式可约化为

$$2x_0^2x_2^2\cdot x_1x_5-(x_1^2+x_2^2)(x_0^2x_2^2-\varepsilon)=0$$

已用到的非退化条件为

$$x_0\neq 0 \qquad x_1\neq 0 \qquad x_2\neq 0 \qquad x_0^2x_2^2+\varepsilon\neq 0$$

终结部分的方程为

$$g=y^2h-\eta=0$$

这里

$$h=(x_2x_5-x_4x_5+x_1x_4-x_2x_3)(x_1x_4-x_2x_3)$$

将 h 与 g 对假设部分的多项式进行约化，得

$$x_0^6x_2^4h=\varepsilon[x_2^2(x_0^2x_2^2-\varepsilon)^2+x_1^2(x_0^2x_2^2+\varepsilon)^2]$$

由于 $x_2\neq 0$，$x_0\neq 0$，故 $g=0$ 在这些非退化条件下相当于方程

$$\varepsilon y^2[x_2^2(x_0^2x_2^2-\varepsilon)^2+x_1^2(x_0^2x_2^2+\varepsilon)^2]-\eta=0$$

括号中一式在非退化条件

$$x_1\neq 0 \qquad x_2\neq 0 \qquad x_0^2x_2^2-\varepsilon\neq 0 \qquad x_0^2x_2^2+\varepsilon\neq 0$$

下是正定的，因而在这些条件下 ε，η 同号即有解，异号即无解. 如所欲证.

这些非退化条件的几何意义是容易理解的. 条件 $x_0^2x_2^2\pm\varepsilon\neq 0$ 在 $\varepsilon=-1$ 时指 $x_3\neq x_1$，而在 $\varepsilon=+1$ 时指 $x_3\neq -x_1$. 不论何时，条件都指 $AC\neq BC$，正如本例开始所说的那样，值得指出的是，这种非退化条件是在机械化证明过程中自然出现的，不必事先加以考虑.

在上两例中，我们并没有完全依照 Tarski-Seidenberg 的机械化证法，而是采用了一个简捷的办法. 详言之，如果假设部分的多项式组为 $\{f_i\}$，终结多项式为 g 时，我们并没有先作 $F=\sum f_i^2+g^2$，再迭次应用 Seidenberg 引理与定理. 与之相反，我们应用了第四章中的方法，从 $\{f_i\}$ 经过整序得基列 Φ: $A_1, A_2, \cdots A_n$. 再将要判断 $g=0$ 是否有解的多项式 g 对 Φ 约化以逐步消去各个变量 x_n，$x_{n-1},\cdots,x_1$，而得余式多项式 $g_{n-1},\cdots,g_0(g_n=g)$. 这里 $g_i\in\overline{\mathbf{K}}[u_1,\cdots,u_c,x_1,\cdots,x_{i-1}]$，$u_i$ 为 x 以外的参数，然后再判定最

后所得多项式方程 $g_0=0$ 是否有解．诸非退化条件则在整序过程与约化过程中自然出现，这一方法之所以可行，乃是因为在以上两例中 g_i 对于 x_i 的次数为1，因而在相应非退化条件下，$g_{i+1}=0$ 是否有解与 $g_i=0$ 是否有解等价．在这一点上类似于第三章中关于 Hilbert 机械化方法关于线性一类定理的证明．在某一$g_i=0$ 对 x_i 的次数大于1时，自然不能用这一方法．

在上两例中，最后都导致判断一个多项式 g 是否为正定或半正定的问题．事实上，有序几何的机械化问题即可归结为判断某一多项式 g 在假设条件

$$f_1=0 \quad \cdots \quad f_n=0$$

下如何添入若干附加条件

$$D_1\neq 0 \quad \cdots \quad D_s\neq 0$$

后成为正定或半正定的问题．如果没有假设条件而已知 g 正定或半正定，则依 Hilbert 二十三个著名问题中的第17问题，g 可表为若干个有理函数的平方之和．这一问题由 Artin [2] 于1926年就得了正面的解决，并为 A. Robinson [2, 3] 推广至有假设条件 $f_1=0,\cdots,f_n=0$ 的一般情形．但正如 Artin [2] 一文中所指出的那样，他的证明是间接的，不能导致分解成平方和的明显表达式，因而要求有一个更为完全的证明．这样的一个构造性的证明后来为 Kreisel [1] 等所给出．但对于我们更为重要的是这样一个先决的问题，即判断一个多项式是否正定的有效方法．这种方法虽已为 Tarski-Seidenberg 所提供，但如何求得效率更高的方法，似尚有待于解决．

第六章　各种几何的机械化定理

6.1 概　　述

第二章 2.6 节曾经给出了关于公理化观点几何的一般概念，在第三章 3.3 节中又给出了几何定理的机械化证法与几何定理证明可以机械化的一般概念. 第三、四、五章又对某些几何或其某一类定理给出了可以机械化的证明及相应的机械化证法. 从公理化到机械化，大体上经历了这样一个过程:

公理化→代数化→坐标化→机械化

建立坐标系统后的机械化问题已由前三章提供了三种不同的方式，可以把它们归结成三种不同类型的代数形式机械化问题，并给出三种不同的机械化方法和确定的解答. 至于从公理出发，通过代数化以到达数系统，并由此建立坐标系统的步骤往往不如通常想象的那么简单，中间要经历一段相当烦琐也相当曲折的道路.

前面几章所考虑的几何实际上都是常用几何的关属几何，因而代数化的过程可以借助于大家所熟悉的常用几何论证与解析几何方法. 对于其它种种不与常用几何关属的几何，则需依据几何公理的特殊方式进行代数化与引进坐标. 本章将举出这样一些例子——投影几何与两种非欧几何. 这些几何在代数化与坐标化后，其几何定理仍然可以归结为前面三章中那种代数形式，因而对于用前面三章的方法得到这些几何定理证明可以机械化的结论也仍然适用，参阅本章第 2 至 5 节关于这些几何的机械化定理.

为简单起见，所有这些几何，我们都局限于平面情形，因而其基本对象都不外乎点与直线两种， 但象第二章 2.6 节中的一般定义所指出的那样，同样也可以考虑以其它元素作为基本对象的几何，例如两种比较容易遇到的圆几何学: 以点和圆作为基本对象

的 Möbius 几何以及以点和有向圆作为基本对象的 Laguerre 几何. 对于这两种圆几何，我们也可以遵循一般的方法从这些几何的公理出发,经过代数化和坐标化,再依前三章的方法来得到这些几何的相应机械化定理. 由于论证过长，故在本章第 5 节中将只作简略介绍,以后将另成专文,不在本书之列的许多公理化的几何都可依此考虑其机械化问题.

本章最后一节考虑了有关超越函数间公式证明的机械化问题. 从该节可以看出,就几何定理证明来看,流行于几何书刊中广泛使用超越函数的做法,事实上是可以避免的.或者也是可以机械化的.

6.2 投影几何定理证明的机械化

象以前那样,在下面的叙述中所谓投影几何,将局限于投影平面几何. 对于高维的情形,基本上是相同的,不同之处将在有关处指出.

因限于平面情形,故这种投影几何中的基本对象只有两种:点和直线，基本关系只有一种: 点在直线上，或直线经过点. 下面给出基本关系所须满足的公理.

关联公理 P

P_1 过任两不同的点有一,且恰有一条直线.

P_2 任两不同直线必有一,且恰有一公共点.

P_3 在任一直线上至少有三个不同的点.

P_4 至少有三个不同的点不在同一条直线上.

由 **P1—P4** 可知,过任一点的不同直线至少有三条. 又 **P1—P4** 并不是完全独立的,但对本书来说无关紧要.

为了把只有有限个点的情形即所谓有限几何者排除在外，我们引入下面的公理:

无限公理 I 在一直线 l 上任取三个不同的点 O_0, O_1 与 O_∞, 又取一不在 l 上的点 Q_∞, 以及过 O_∞ 而不同于 $Q_\infty O_\infty = l_\infty$ 与 l

的直线 m，连 $Q_\infty O_0$，$Q_\infty O_1$ 与 m 交于 P_0，P_1. 作 P_1 与 $O_1P_0 \wedge l_\infty = R_\infty$ 的连线并与 l 交于 O_2，连 $Q_\infty O_2$ 与 m 交于 P_2，又作 P_2R_∞ 与 l 的交点 O_3. 依次类推，可作 O_4，O_5，$\cdots$. 同样连结 P_0 与 $O_0P_1 \wedge l_\infty = S_\infty$ 并交 l 于 O_{-1}，又连 O_{-1} 与 Q_∞ 而交 m 于 P_{-1}. 再作 $P_{-1}S_\infty$ 与 l 交于 O_{-2}. 依次类推，可作 O_{-3}，O_{-4}，$\cdots$. 于是所得序列

$$\cdots O_{-n}, \cdots, O_{-1}, O_0, O_1, O_2, \cdots, O_n, \cdots$$

中的点彼此不同. 如图 6.1.

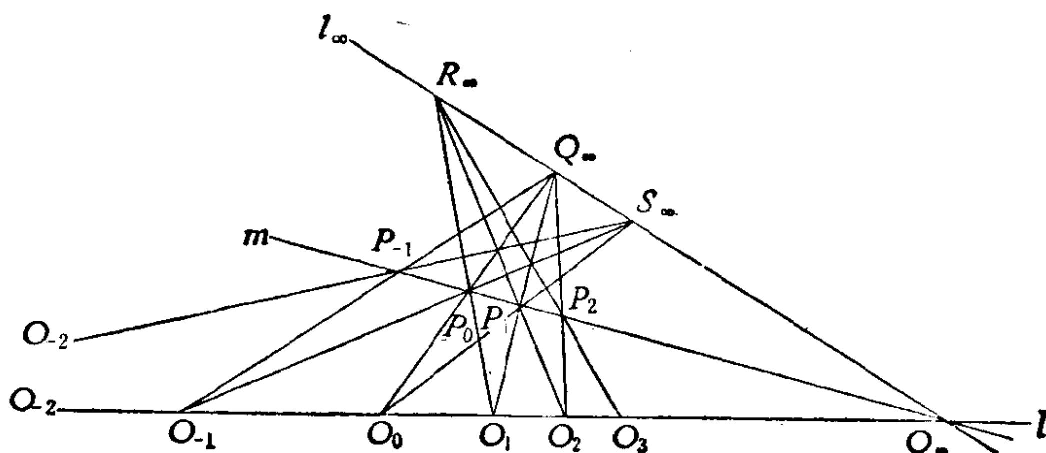


图 6.1

此外还引入下面的公理. 参见图 6.2.

Desargues 公理 D_1 设两个三点形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$，其中 A，B，C 不在一直线上，A'，B'，C' 也不在一直线上，又直线 AB 与 $A'B'$ 不同，AC 与 $A'C'$ 不同，BC 与 $B'C'$ 不同，且三个交点

$$P = AB \wedge A'B' \qquad Q = AC \wedge A'C' \qquad R = BC \wedge B'C'$$

在同一直线上. 则当 A 与 A' 不同，B 与 B' 不同，且 C 与 C' 不同时，三直线 AA'，BB'，CC' 必经过同一个点.

Desargues 公理 D_2 设两个三点形 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$，其中 A，B，C 各不同于 A'，B'，C'，且直线 AA'，BB'，CC' 彼此不同而同过一点 O. 则当直线 AB 与 $A'B'$ 不同，AC 与 $A'C'$ 不同，BC 与 $B'C'$ 不同时，三个交点

$$P = AB \wedge A'B' \qquad Q = AC \wedge A'C' \qquad R = BC \wedge B'C'$$

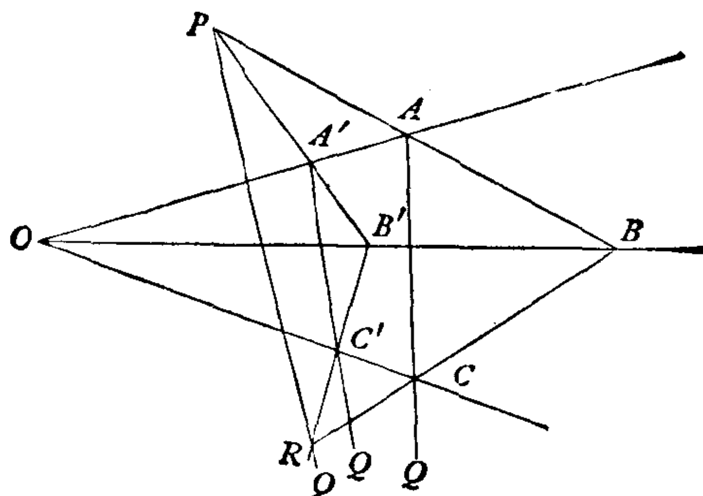


图 6.2

必在同一直线上.

如所周知，Desargues 公理可以作为空间投影几何的定理来证明，但这里只局限于平面的情形，故不能从其它关联公理与无限公理导出而作为独立公理引入. 上面 Desargues 公理的叙述比通常投影几何书籍中叙述繁复得多，其原因正如第三章 3.1 节中所指出的那样，如果不附加许多非退化的条件，公理可能失去意义甚至根本不成立. 例如在 Desargues 公理 D_1 中，如果 A，B，C 三点在同一直线上，且尽管符合其它非退化条件，三点 $P=AB\wedge A'B'$，$Q=AC\wedge A'C'$，$R=BC\wedge B'C'$ 也都在同一直线，即 A，B，C 所在的直线上，但 AA'，BB'，CC' 不必同过一点. 见图 6.3.

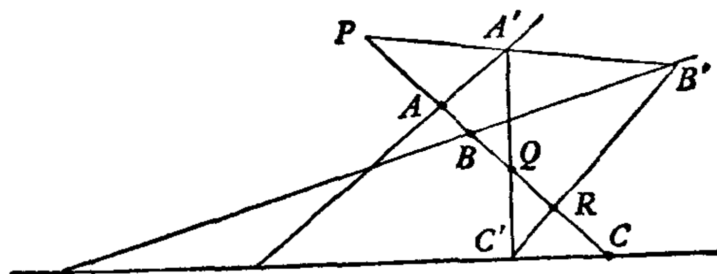


图 6.3

指出这一点是极为重要的，而且类似情况的出现是颇为普遍的，决不局限于这里的投影几何. 因此我们将重新叙述已见于第

三章 3.1 节的论点如下:

尽管各种几何可以有一个严密而无矛盾的公理系统作为一切推理论证的出发点，但由于传统的欧几里得证明方式无法处理各种退化情况，因而这种证明方式要达到逻辑上应有的严密要求，至少在实际上是不可能的.

在关联公理 P 无限公理 I 与 Desargues 公理 D 的假定下，即可在几何中引进一内在地附属于几何的数系统如下:

首先在任一直线 l 上任取三个不同的点，记作 O_0, O_1, O_∞，于是视 l 上任一不同于 P_∞ 的一点 A 为一个数，而用相应的小写拉丁字母记成 a，并用记号 $A \longleftrightarrow a$ 表示这一对应关系. 这些数构成一个集合，$N = N(O_0, O_1, O_\infty)$. 今在其中依下法引进加法与乘法的运算.

1. 加法

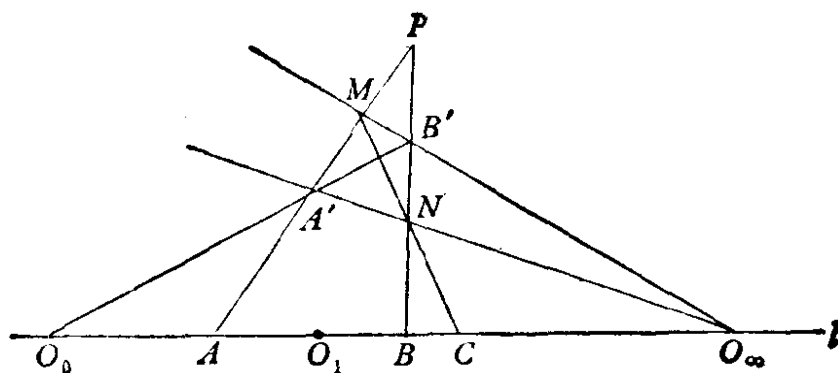


图 6.4

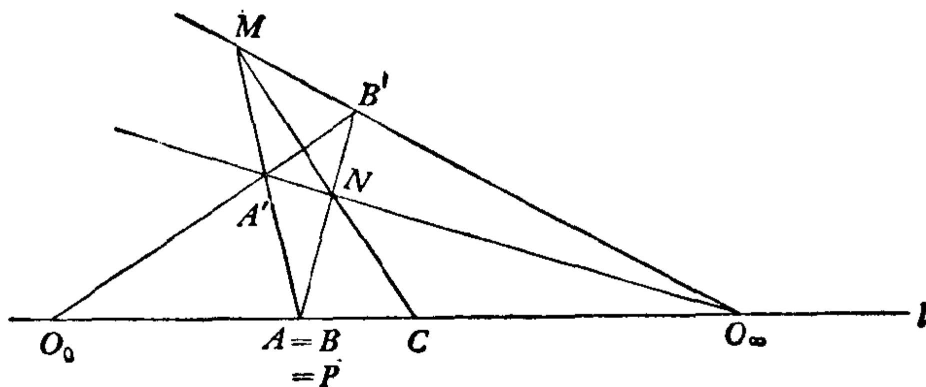


图 6.5

如图 6.4，设 l 上任意不同于 O_∞ 的两点 A, B，各视为数 a 与

b. 今定义 $a+b$ 以及 l 上与之相应的点 C 如次.

先设 A, B 不同且不同于 O_0. 过 A 与 B 各作与 l 不同的两直线，并设其交点为 P. 又过 O_0 作一与 l 不同但不过 P 的直线各与前两直线交于 A', B'. 连 $O_\infty B'$ 与 AA' 交于 M，又连 $O_\infty A$ 与 BB' 交于 N. 因 M，N 都不同于 P，故 M 与 N 不同而可连结 MN 与 l 交于一点 C. 显然 C 点与 O_∞ 不同，且应用 Desargues 公理可证 C 与作法中诸直线的选择无关，因而 C 唯一地对应于 N 中的一个数，定义为 a 与 b 两数之和，记作 $a+b$: $C\longleftrightarrow a+b$.

在 A 与 B 相同而不同于 O_0 时（如图 6.5），仍可应用上述作法以定义 $C\longleftrightarrow a+b$，只需在词句上稍加修改即可. 在 A 与 O_0 相同时，则作法失效，但此时将直接定义 C 为 B，或定义 $a+b=b$. 同样，在 B 与 O_0 相同时，将直接定义 C 为 A 或 $a+b=a$.

于是不论何时，在 $N=N(O_0, O_1, O_\infty)$ 中都定义了一个加法.

2. 乘法

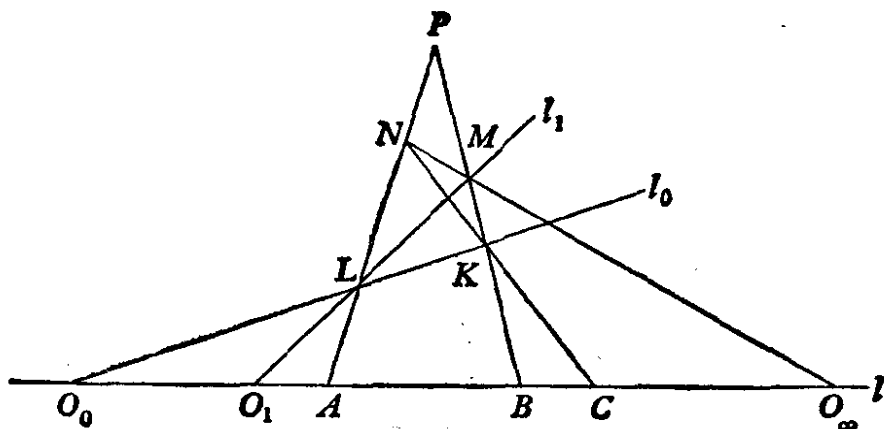


图 6.6

仍设 A, B 与 O_∞ 不同，且 $A\longleftrightarrow a$, $B\longleftrightarrow b$ 如前.

如图 6.6，先设 A 与 B 不同，且不同于 O_0, O_1. 过 A, B 各作不同于 l 的直线交于一点 P. 又过 O_0 作一不同于 l 且不过 P 的直线与前两直线交于 L 与 K. 连 O_1L 与 BP 交于 M，又连 $O_\infty M$ 与 AP 交于 N，连 KN 与 l 交于 C. 则 C 与 O_∞ 不同，且应用

Desargues 公理可证 C 与过 A, B, O_0 等所作直线的选择无关. 于是 C 在 N 中所对应的数将定义为 a 与 b 的积, 记作 ab, 即 $C \longleftrightarrow ab$.

在 A, B 相同而与 O_0, O_1, O_∞ 不同时仍可依上述作法以定义 C,只需在词句上稍加修改即可. 对于其它情形,则以上作法失效,但可直接定义 ab 如下: A 或 $B = O_0$ 时, $C = O_0$ 或 $ab = 0$. $A = O_1$ 时, $C = B$ 或 $ab = b$. $B = O_1$ 时, $C = A$ 或 $ab = a$.

于是不论何时, a, b 的乘法都有定义.

几何代数化的第一步,也是最主要的一步在于下面的定理.

定理 1 在任一直线 l 上固定三个不同的点 O_0, O_1, O_∞ 后, l 上与 O_∞ 不同的点可与一数系 $N = N(O_0, O_1, O_\infty)$ 中的数一一对应. 其中 O_0 对应于 0, O_1 对应于 1, 而在上面所定义的加法与乘法下, N 成一 Desargues 数系, 即一数体, 满足第一章 1.4 节中 N 1—N12 诸公理. 又对另任一直线 l' 与其上不同的三点 O'_0, O'_1, O'_∞, 依同法在 l' 上与 O'_∞ 不同的点同 Desargues 数系 $N' = N(O'_0, O'_1, O'_\infty)$ 中的数一一对应. 这时有一同构 $F: N \approx N'$, 使在 F 下 N 中的 0, 1 各与 N' 中的 0, 1 对应.

在定理中所唯一确定至同构的数体 **N** 称为几何的**附属数体**.

上面关于 $a + b$, ab 定义的合理性以及定理 1 中所包含许多论断的证明都需反复使用 Desargues 公理. 这种在几何中引进数体的方法源出于 V. Staudt. 如果在平面上除去一直线作为无穷远线,并把 O_∞ 取在这一无穷远线上, 则将得一 Desargues 平面以及相应的 Desargues 数系. 第一章中 Hilbert 引进 Desargues 数系的方法实际上即系从 V. Staudt 的这种方法中得来.

定理 1 所引进的几何附属数系 **N** 是一数体, 其中乘法交换律一般不成立,今引入下述公理.

Pappus 公理 设两不同直线 l, l' 上各有三点 A, B, C 与 A', B', C', 彼此不同,且不同于 l, l' 的交点,则以下三点

$$P = BC' \wedge B'C \qquad Q = CA' \wedge C'A \qquad R = AB' \wedge A'B$$

必同在一直线上.

这一公理对几何基础的重要意义在于下面的定理，它为 V. Staudt 首次提出.

定理 2 Pappus 公理成立与否为数体**N**中乘法交换律是否成立,即**N**是否成为数域的充要条件.

今称以点与直线为基本对象,以关联关系为基本关系,并满足以下诸公理的几何为**无序投影几何**:

1. 关联公理 P1—P4.
2. 无限公理 I.
3. Pappus 公理.

依据著名的 Hessenberg 定理, Desargues 公理将作为这一几何的定理而从公理 1,2,3 得出.

Pappus 公理的另一重要作用是所谓投影几何基本定理成立,且在其余公理成立之下,二者等价. 在 Pappus 公理成立因而投影几何基本定理也成立的假定下,给定两直线 l, l' 与其上各互不相同的三点 O_0, O_1, O_∞ 与 O'_0, O'_1, O'_∞ 后，经过多次透视变换将 l 上的点对应为 l' 上的点,使 O_0, O_1, O_∞ 各对应为 O'_0, O'_1, O'_∞ 时, l 到 l' 的对应即被完全确定,由此知定理 1 中的同构

$$F:N(O_0, O_1, O_\infty) \approx N(O'_0, O'_1, O'_\infty)$$

可取为由多次透视变换所实现的确定同构，而与所选择的透视变换无关，因此可以确定的方式把所有数体(这时也是数域) $N(O_0, O_1, O_\infty)$ 恒同为一. 如前记为**N**,则**N**不仅同构于任一 $N(O_0, O_1, O_\infty)$; 而且这一同构是唯一地确定了的. 此外,交比的概念也可以作为**N**中的一个数依通常的那种方式引入.

这些论断只在 Pappus 公理成立下,即在上面所定义的无序投影几何中才能成立,而与“仿射”情形有所不同，这时与 Pappus 公理相当的所谓交线 Pascal 公理并不是必要的，参阅第一章 1.6 节.

在无序投影几何中可建立坐标系统如下.

如图 6.7,在平面上任取四个没有三点在一直线上的点 A_1, A_2,

A_3, I. 命

$$A_1I \wedge A_2A_3 = I_1 \qquad A_2I \wedge A_3A_1 = I_2 \qquad A_3I \wedge A_1A_2 = I_3$$

在直线 A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 上各有确定的数系

$$N_1 = N(A_2, I_1, A_3)$$

$$N_2 = N(A_3, I_2, A_1)$$

$$N_3 = N(A_1, I_3, A_2)$$

这些数系都是数域且彼此确定同构，记几何的附属数域为 $\mathbf{N}$,则有确定同构

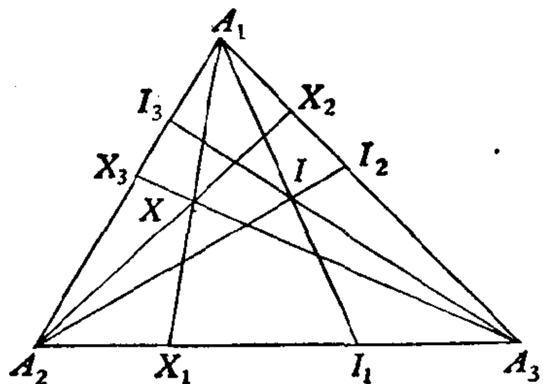


图 6.7

$$F_i: \mathbf{N} \approx N_i \qquad i = 1, 2, 3$$

我们将把 N_i 中的数在这些确定同构下恒同为 $\mathbf{N}$ 中的数,而在记号上不再区分.

下面将称 $A_1A_2A_3$ 为坐标三点形，I 为单位点，$(A_1A_2A_3I)$ 构成一坐标系.

今对平面上任一不在 A_2A_3, A_3A_1 或 A_1A_2 上的 X,置

$$A_1X \wedge A_2A_3 = X_1 \qquad A_2X \wedge A_3A_1 = X_2 \qquad A_3X \wedge A_1A_2 = X_3$$

则 X_1, X_2, X_3 在 N_1, N_2, N_3 或 $\mathbf{N}$ 中各对应于数

$$X_1 \longleftrightarrow \bar{x}_1 \qquad X_2 \longleftrightarrow \bar{x}_2 \qquad X_3 \longleftrightarrow \bar{x}_3$$

可证

$$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 = 1$$

这一关系式对于在 A_1A_2, A_2A_3 或 A_3A_1 上的点一般并不成立，为此改写诸 $\bar{x}$ 为

$$\bar{x}_1 = x_3/x_2 \qquad \bar{x}_2 = x_1/x_3 \qquad \bar{x}_3 = x_2/x_1$$

这里 (x_1, x_2, x_3) 唯一确定至一非 0 因子，我们将称之为 X 对坐标系 $(A_1A_2A_3I)$ 的齐次坐标,记作

$$X = (x_1 : x_2 : x_3)$$

若 $X = X_1$ 在 A_2A_3 上,但既非 A_2 也非 A_3,而 X_1 对应于 N_1 或即 $\mathbf{N}$ 中的 $\bar{x}_1$，则称 X 的齐次坐标为唯一确定至非 0 因子的数组 $(0, 1, \bar{x}_1)$，记作

$$X_1 = (0:1:\bar{x}_1)$$

对于在 A_3A_1 或 A_1A_2 上，但不同于 A_1, A_2, A_3 的点也同样．在 $X = A_1, A_2, A_3$ 时，则同样置齐次坐标为

$$A_1 = (1:0:0) \qquad A_2 = (0:1:0) \qquad A_3 = (0:0:1)$$

在坐标系 $(A_1A_2A_3I)$ 下，一条直线 l 上的任意一点 $P = (x_1:x_2:x_3)$ 必满足一个齐次线性方程

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

这里 u_1, u_2, u_3 不全为 0，且只确定到一非 0 因子．于是任一这样的数组 (u_1, u_2, u_3) 将称为这一直线 l 在坐标系 $(A_1A_2A_3I)$ 下的齐次坐标，记作

$$l = (u_1:u_2:u_3)$$

于是点 $P = (x_1:x_2:x_3)$ 与直线 $l = (u_1:u_2:u_3)$ 相关联的充要条件即为上述的齐次方程．

由于在无序投影几何中的基本对象是点与直线，基本关系只有一种，即点与直线的关联．在取定一坐标系并将点与直线都用齐次坐标表达后，这一基本关系可由数域中多项式关系式

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

来表达．因而由 6.1 节所说的一般原理，有下述定理．

机械化定理 1 无序投影几何的几何定理有机械化证法．

下面的两条定理对本节机械化问题的关系不大，但在另外一些几何机械化定理的证明中要用到，见后第 4,5 节．今先引入若干概念．

设无序投影几何的平面上点与直线的集合有一到自身的一一对应 T．如果 T 把点变为点，直线变为直线，且 T 保持关联关系，即点 P 在直线 l 上时，点 $T(P)$ 也在直线 $T(l)$ 上，则 T 称为一直射变换．如果 T 把点变为直线，把直线变为点，且 T 保持关联关系，即点 P 在直线 l 上时，点 $T(l)$ 也在直线 $T(P)$ 上，则 T 称为一逆射变换．

定理 3 在一个坐标系 $(A_1A_2A_3I)$ 下，对每一直射变换 T，有 $\mathbf{N}$ 中的数 a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$ 与 $\mathbf{N}$ 的一个自同构 J，使 $|a_{ij}| \neq$

0，且使T把点 $P=(x_1:x_2:x_3)$ 变为点 $P'=(x'_1:x'_2:x'_3)$ 时，有$\rho\neq 0$，而

$$\rho x'_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}J(x_j)\qquad i=1,2,3$$

定理 4 同上，若T为一逆射变换，则仍有 a_{ij} 与 J，使 $|a_{ij}|\neq 0$，且使T变点 $P=(x_1:x_2:x_3)$ 为直线 $l=(u_1:u_2:u_3)$ 时，有$\rho\neq 0$，而

$$\rho u_i=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}J(x_j)\qquad i=1,2,3$$

迄今为止在所讨论的投影几何中并未引入任何有关次序的概念，因而几何的附属数域事实上可以为任意无序数域，例如复数域. 在考虑次序关系时，显然不能象常用几何那样以三个点中一个点在另两个点之间的关系作为基本关系，而将以四个点之间的分隔关系来代替. 换言之，对于四个点 A，B，C，D 将引入 A，C 被 B，D 所分隔这种不加定义的关系作为基本关系，记作

$$AC/BD$$

今采取以下诸公理作为这一基本关系所应满足的公理.

分隔公理 S

公理 S_1 若 AB/CD，则点 A，B，C，D 互不相同且在同一直线上.

公理 S_2 若 AB/CD，则 CD/AB 且 BA/CD.

公理 S_3 若 AB/CD，则不能有 AC/BD.

公理 S_4 若 A，B，C，D 四点互不相同且在一直线上，则 AB/CD，AC/BD，AD/BC 三者必有其一.

公理 S_5 若点 A，B，C 彼此不同，且在一直线上，则必有一点 D，使 AB/CD.

公理 S_6 对任意五个彼此不同，且在一直线上的点 A，B，C，D，E，若 AB/DE，则必有 AB/CD 或 AB/CE.

公理 S_7（透视公理） 设点 A，B，C，D 与 A'，B'，C'，D' 各

在同一直线 l 与 l' 上，而 $l \neq l'$. 又设有一点 O,使 O, A, A' 在一直线上，同样 O, B, B', O, C, C' 与 O, D, D' 都各在一直线上,则 AB/CD 时，也有 $A'B'/C'D'$. 这里并不排除 $A = A'$ 的情形.

满足分隔公理 S_1—S_7 的无序投影几何将改称为**有序投影几何**.

对于一个有序投影几何，设在任一直线 l 上取三个不同的点 O_0, O_1, O_∞ 以作数域 $N = N(O_0, O_1, O_\infty)$, 则对 l 上任一不同于 O_∞ 的点 A 如果有 AO_1/O_0O_∞, 即称 A 所对应的数 a 为负，记作 $a < 0$. 如果一点 B 不同于 O_∞ 与 O_0, 而所对应的数 b 不小于 0,则称 b 为正，记作 $b > 0$. 由透视公理 S_7, 可知 N 中数的正负不因所取直线 l 与点 O_0, O_1, O_∞ 而异,故可以定义几何附属数域 **N** 中数的正负.

依据常法可在几何附属数域 **N** 中定义数的大小关系，证明这种关系满足第一章 1.4 节中的有关诸公理 N1—N17,于是 **N** 成为一有序数域.

在一组投影坐标系（$A_1A_2A_3I$）下,一条直线上四个点的分隔关系易见可由这些点坐标之间某些线性式的不等关系来表达，因而由 6.1 节的一般原则有下面的定理:

机械化定理 2 有序投影几何的几何定理有机械化证法.

注意本节的两条机械化定理是彼此独立的. 这是因为一方面有序投影几何只是无序投影几何的一个特殊情形，而另方面前者所涉及定理的内容较后者丰富. 因此这两种机械化定理并无统属关系，任一不能从其它一个推出. 而且，两者的机械化证明方法也是截然不同的,这也适用于以下各节中的类似情形.

6.3 Bolyai-Lobachevsky 双曲型非欧几何定理证明的机械化

欧几里得《几何原本》关于平行线的公理是说，过给定直线外

一点有且恰有一条直线与所给直线平行，即永不相交。

长期以来对这一公理在整个欧几里得公理体系中是否独立的异议使得在 19 世纪产生了所谓**非欧几何学**，并引起了对常用几何公理系统全面的逻辑分析和研究，最后导致了 Hilbert《几何基础》的诞生.

在本书第一章 1.1 节中，曾罗列了 Hilbert 关于常用几何的公理系统，其中加强了的平行公理 HIV，即为上述欧几里得的平行线公理. 如果适当改变这一公理与关联公理而保留所有其它公理，可得到两种通常的非欧几何学，即

Balyai-Lobachevsky 双曲型非欧几何

Ricmann 椭圆型非欧几何

这两种几何下面将简称为 BL 几何与 R 几何，前者是研究得较多的一种，本节将着重研究这种几何如何从公理化到机械化的问题.

在通常的 BL 几何中，我们只改变平行公理而保留所有其它公理. 由于假定了关联公理 HI 与次序公理 HII，因而可以定义线段半直线与角及角的内部等等概念. 于是在这种几何中代替公理 HIV 的是下面的公理，记成 HIVBL.

公理 HIVBL 对任一给定的直线 b 与不在 b 上的一点 A，恒有从 A 出发的两条半直线 a_1, a_2, 既不构成同一直线又不与 b 相交，但由 a_1, a_2 所构成的角的内部，任一从 A 出发的半直线都与 b 相交.

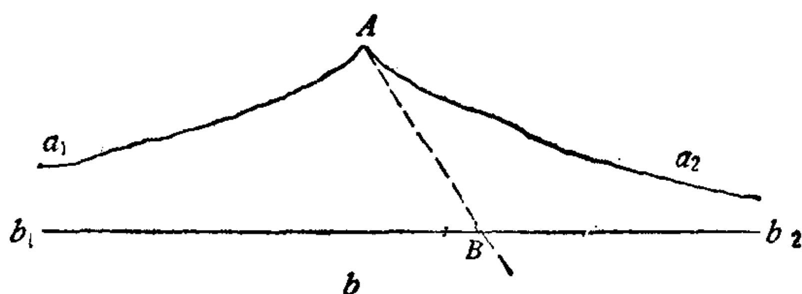


图 6.8

这一公理中所确定的两条半直线 a_1, a_2 所定直线通常称为 b

的两条过A的平行线．详细地说，设在a_1，a_2所成角的内部有一从A出发的半直线与b交于B点，又设在B把b分成的两条半直线b_1，b_2中，b_1与a_1同在直线AB的一侧，而b_2与a_2同在AB的另一侧，则称半直线a_1与b_1平行，而a_2与b_2平行．

象本书第一、二两章那样，我们也可以关联公理 HI，新的平行公理 HIVBL 为基础，添入其它一些公理以建立各种类型的几何，来探讨公理之间的相互依存性．姑且不论这种做法的意义如何，至少这与本书的目的不相符．本书的主旨乃是在于如何从这些公理出发，通过代数化与坐标化，进而为定理证明给出机械化的方法．

这方面的代表作仍是 Hilbert 的著作．继 1899 年的《几何基础》之后，Hilbert 在 1903 年发表了"Bolyai-Lobachevsky 几何新基础"一文(见 Hilbert [3])，并作为附录之一载入《几何基础》的以后诸版．在该文中，Hilbert 指出了如何从公理 HI，HII，HIII 与 HIVBL 出发，建立这一非欧几何的方法．此文与前后出现的大量关于非欧几何的文献相比有下面两个特点．

第一，Hilbert 在该文之末明确指出，建立 BL 几何与导出这种几何中的许多有名公式根本不需要连续性的公理，而只需公理 HI—HIV 即可．这里的公理 HIV 自然是指上面的公理 HIVBL．

第二，Hilbert 引进了一种所谓远端（enden）的算法，用此建立坐标系统，证明点可用线性方程表示，由此得出了建立 BL 几何可不用连续假设的结论．

正如本书第一、二两章所指出的关于常用几何机械化问题那样，由于连续性假设是不必要的，因而就在理论上为 BL 几何机械化的可能性提供了某种保证；又由于第二点，实际上已指出了如何从公理化进而代数化与坐标化以至机械化的具体道路．

Hilbert 的原文比较简略，其后 Gerretsen [1, 2]，Szász [1, 2, 3]，Szmielew [1, 2] 等依据 Hilbert 的原文作了较详细的论述．以下，将依据 Hilbert 与 Szász 作一概括的介绍并指出 BL 几何定理的证明可以机械化的理由与方法．

首先，作为定义，称每一条半直线确定了一个远端，互相平行

的半直线具有相同的远端．远端用希腊字母来表示．一条从A点出发以α为远端的半直线记为$A\alpha$或(A,α)．每一直线恰好有两个远端，如果记之为α与β，则这一直线也称为连结远端α,β的直线，记为$\alpha\beta$或$\beta\alpha$，有时也记为(α,β)或(β,α)．

依据公理 HI—HIV，其中 HIV 指 HIVBL，可证任给两条半直线，其代表的远端为α与β时，必有一直线以α，β为其远端，同样任给一点A时，有半直线$A\alpha$．又可证任两条既不平行又不相交的直线必有一公共垂线，以及有关反射概念的命题等，不遑枚举．

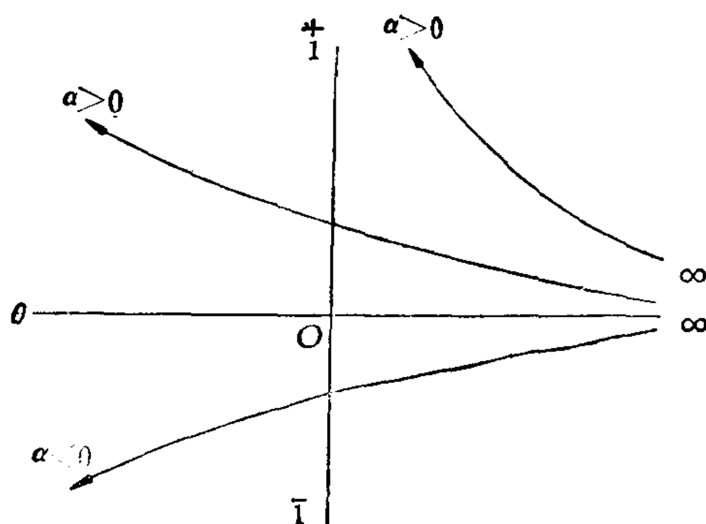


图 6.9

今在 BL 几何的平面中任取一点O作为原点，从O出发互相垂直的两条半直线为坐标轴．两条半直线的远端各记为∞与$\overset{+}{1}$．又与$O\infty$以及$O\overset{+}{1}$相反方向的那两条半直线的远端则记为θ与$\overset{-}{1}$．这样的坐标系称为 Hilbert 坐标系．

今在平面上除∞远端之外引进远端的正负概念以及远端之间的加法与乘法如下：

1．远端的正负．

对任一远端$\alpha \neq \infty,\theta$作直线$\alpha\infty$．若这一直线与半直线$O\overset{+}{1}$在直线$\theta\infty$的同侧，则称$\alpha$为正，记为$\alpha>0$；否则称$\alpha$为负，记为$\alpha<0$．

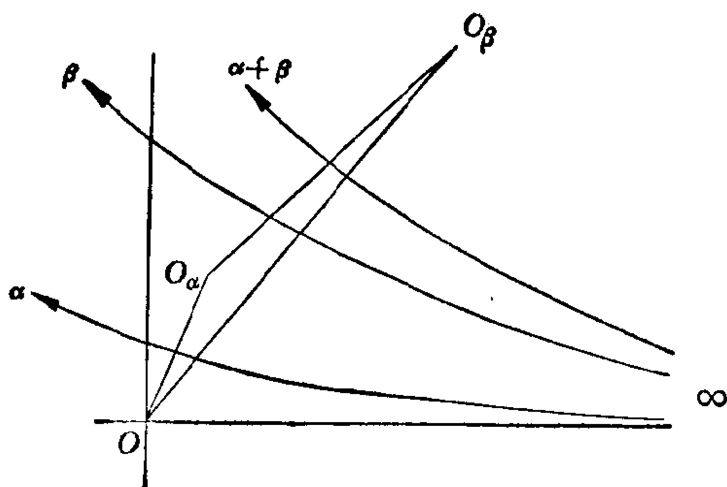


图 6.10

2.远端的加法.

设远端 α 与 β. 作直线 $\alpha\infty$ 与 $\beta\infty$，又作原点 O 对 $\alpha\infty$ 的对称点 O_α 与 O 对 $\beta\infty$ 的对称点 O_β. 作 $O_\alpha O_\beta$ 的垂直平分线，可证这一垂直平分线的一个远端即为∞(这相当于定理：$\Delta OO_\alpha O_\beta$ 三边的三条垂直平分线同交于一点∞)，于是另一个远端即定义为 $\alpha+\beta$.

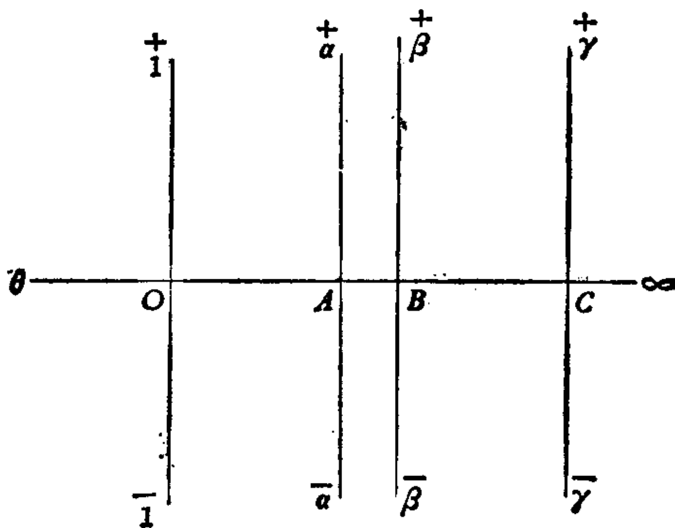


图 6.11

3.远端的乘法.

设垂直于 $\theta\infty$ 的两条直线 $\overset{+}{\alpha}\overset{-}{\alpha}$ 与 $\overset{+}{\beta}\overset{-}{\beta}$，这里 $\overset{+}{\alpha},\overset{+}{\beta}$ 各在直线 $\theta\infty$ 的 $\overset{+}{1}$ 的同侧，而 $\overset{-}{\alpha},\overset{-}{\beta}$ 各在 $\theta\infty$ 的 $\bar{1}$ 的同侧，因而按上述 $1,\overset{+}{\alpha},\overset{+}{\beta}>0$ 而 $\overset{-}{\alpha},\overset{-}{\beta}<0$. 命 $\overset{+}{\alpha}\overset{-}{\alpha}$，$\overset{+}{\beta}\overset{-}{\beta}$ 与 $\theta\infty$ 的交点各为 A，B，今在 $\theta\infty$ 上取

一点C使线段 $|BC|$ 与 $|OA|$ 全合且自B至C的方向与自O至A的方向相同. 过C作直线与$\theta\infty$ 垂直(在 $C=O$ 时即 $\overset{+-}{11}$ 自身), 记它的两个远端为 $\overset{+}{\gamma}$ 与 $\overset{-}{\gamma}$, 其中 $C\overset{+}{\gamma}$ 与 $O\overset{+}{1}$位于$\theta\infty$ 的同侧, 而 $C\overset{-}{\gamma}$ 与 $O\overset{-}{1}$ 位于$\theta\infty$ 的另一同侧,即 $\overset{+}{\gamma}>0$, 而 $\overset{-}{\gamma}<0$,于是定义乘法关系如下.

$$\overset{+}{\alpha}\overset{+}{\beta}=\overset{+}{\gamma}$$
$$\overset{-}{\alpha}\overset{-}{\beta}=\overset{+}{\gamma}$$
$$\overset{+}{\alpha}\overset{-}{\beta}=\overset{-}{\gamma}$$
$$\overset{-}{\alpha}\overset{+}{\beta}=\overset{-}{\gamma}$$

特别有

$$\overset{-}{1}\overset{+}{\alpha}=\overset{-}{\alpha}\qquad \overset{-}{1}\overset{-}{\alpha}=\overset{+}{\alpha}$$
$$\overset{+}{1}\overset{+}{\alpha}=\overset{+}{\alpha}\qquad \overset{+}{1}\overset{-}{\alpha}=\overset{-}{\alpha}$$

此外又定义

$$\overset{+}{\alpha}\theta=\theta\overset{+}{\alpha}=\overset{-}{\alpha}\theta=\overset{-}{\alpha}\theta=\theta$$
$$\overset{+}{\alpha}=-\overset{-}{\alpha}\qquad \overset{-}{\alpha}=-\overset{+}{\alpha}$$

Hilbert 证明了下面的定理.

定理 1 在 BL 非欧平面上确定一 Hilbert 坐标系并定义不等于∞的远端的正负及其间的加法与乘法如上. 则这些不等于∞的远端构成了一个有序数域,即一个乘法可交换的 Desargues 数系,具有大小关系,且满足第一章 1.4 节关于数系的公理N1—N17. 在这一数域中,远端 θ, $\overset{+}{1}$, $\overset{-}{1}$ 扮演着 0, +1, −1 的角色,因而直接记为

$$\theta=0\qquad \overset{+}{1}=+1\qquad \overset{-}{1}=-1$$

定理中的数域称为双曲型非欧几何的**附属数域**.

在 Schur [2] 一文中,对于 Hilbert 引入远端加法与乘法定义的方式有很好的几何解释:

$$\alpha\beta=\gamma\Longleftrightarrow$$

在所有远端所处的无穷远直线上以下两点列成投影对应：

$$(\infty 01\beta)\overline{\wedge}(\infty 0\alpha\gamma)$$

为引进点的坐标，先引进若干符号如下：

如图 6.12，首先在任一直线例如坐标轴 $\theta\infty$ 上，依据全合公理可自然地引进从 O 开始的有向线段的加法，对 $\theta\infty$ 上任一点 A，记从 O 到 A 的有向线段为 $|\overrightarrow{OA}|$，则对 $\theta\infty$ 上任意两点 A，B，有向线段 $|\overrightarrow{OA}|$ 与 $|\overrightarrow{OB}|$ 之和是一个有向线段 $|\overrightarrow{OC}|$，C 也在 $\theta\infty$ 上，今对任一 $\theta\infty$ 上的有向线段 $t=|\overrightarrow{OA}|$，作一过 A 而与 $\theta\infty$ 垂直且在 $O\overset{+}{1}$ 同侧的半直线，记其远端为 λ_t，则易见有

$$\lambda_0 = 1 \qquad \lambda_t > 0$$

$$\lambda_t \cdot \lambda_{-t} = 1$$

$$\lambda_s \cdot \lambda_t = \lambda_{s+t}$$

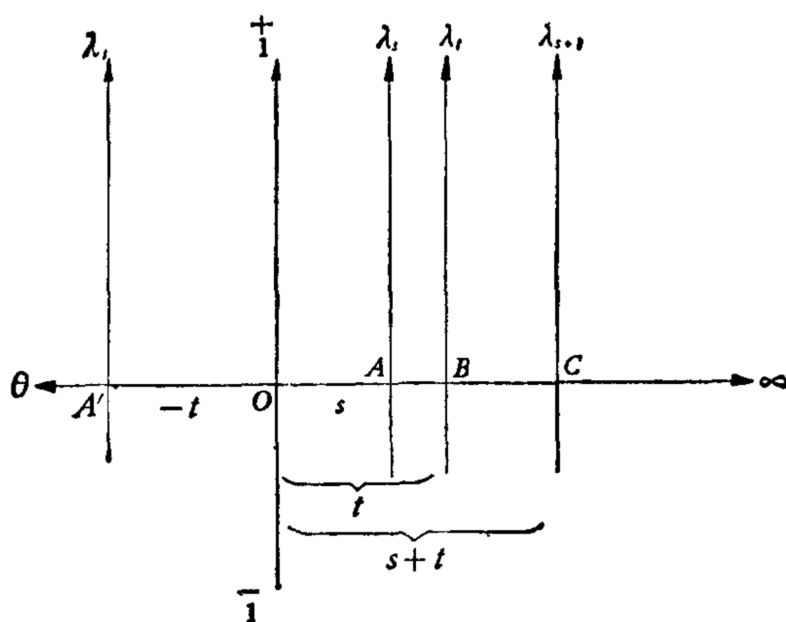


图 6.12

如图 6.13 易证 λ 在正远端与 $\theta\infty$ 上的有向线段 $t=|\overrightarrow{OA}|$ 或其端点 A 之间建立了一个一对一的对应关系．盖设任一正远端 $\alpha>0$，连结 $O\alpha$，并作 $O\alpha$ 对 $\theta\infty$ 的对称半射线 $O\bar{\alpha}$，其远端 $\bar{\alpha}$ 即 $-\alpha$．依 Hilbert [3] 一文中的作法连结 $\alpha\bar{\alpha}$，命其与 $\theta\infty$ 的交点为 A，而命 $|\overrightarrow{OA}|=t$，则显然 $\alpha\bar{\alpha}$ 与 $\theta\infty$ 垂直而有 $\alpha=\lambda_t$．

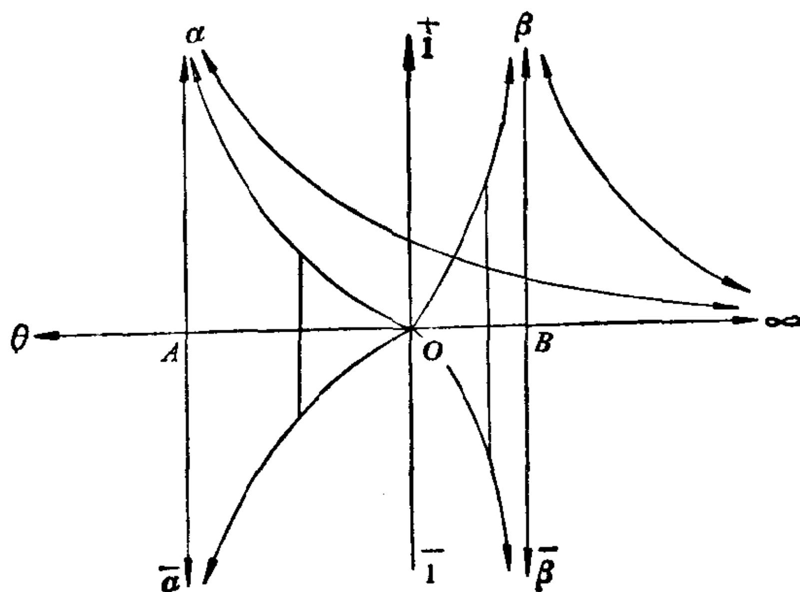


图 6.13

若另一正远端 $\beta > 0$ 依上法对应于 $s = |\overrightarrow{OB}|$，则由次序公理易知 $\beta > \alpha$ 或 $\beta < \alpha$，视从 A 至 B 的方向与 $\theta\infty$ 的方向相同或相异而定．由此即知 $\alpha \longleftrightarrow A$ 或 $\lambda_t \longleftrightarrow t$ 的对应关系是一一对应的．

今依远端运算引入以下诸远端：

$$\gamma_t = \frac{1}{2}(\lambda_t + \lambda_{-t})$$

$$\sigma_t = \frac{1}{2}(\lambda_t - \lambda_{-t})$$

$$\tau_t = (\lambda_t - \lambda_{-t})/(\lambda_t + \lambda_{-t})$$

则在这些远端之间有以下关系：

$$\gamma_t^2 - \sigma_t^2 = 1$$

$$\gamma_{s+t} = \gamma_s\gamma_t + \sigma_s\sigma_t$$

$$\sigma_{s+t} = \sigma_s\gamma_t + \sigma_t\gamma_s$$

如果所考虑的几何还满足连续性的公理（包括阿基米德公理与完备公理），即对于通常的 BL 非欧几何那种情形，则可将有向线段 t 当作一个实数来代表它的长度． 于是 λ_t，γ_t，σ_t，τ_t 将各为 t 的指数函数与各双曲三角函数（exp，cosh，sinh，tanh）．但

这里并不假定任何连续性公理. 由于 λ_t 等是由远端运算所引入，因而不牵涉任何超越函数的概念，整个论证计算可以不超过有限与有理的范围. 关于这一点还可参阅本章的第 6 节.

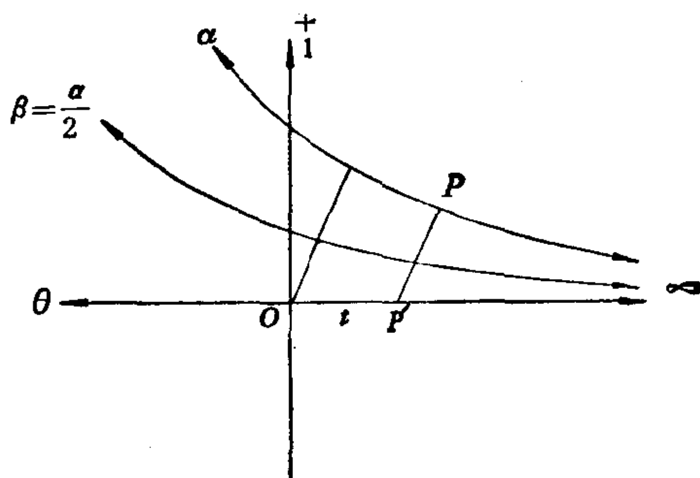


图 6.14

如图 6.14，今对平面上任一点 P 作半直线 $P\infty$，并命其所定直线与 ∞ 相反的另一远端为 α. 再作远端 $\beta=\dfrac{\alpha}{2}$，并作直线 $\beta\infty$，作 P 对 $\beta\infty$ 的对称点 P'，则 P' 在轴 $\theta\infty$ 上，故可设有向线段

$$|\overrightarrow{OP'}|=t$$

今置

$$\xi_1=\sigma_t+\frac{1}{2}\alpha^2\cdot\lambda_{-t}$$

$$\xi_2=\alpha\cdot\lambda_{-t}$$

$$\xi_3=\gamma_t+\frac{1}{2}\alpha^2\cdot\lambda_{-t}$$

则三个远端的组 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 称为 P 点对于这一 Hilbert 坐标系的 Hilbert 齐次坐标，特别是原点的坐标 O 为 $(0, 0, 1)$.

定理 2 在 Bolyai-Lobachevsky 非欧平面上取定一 Hilbert 坐标系，则任一点 P 的 Hilbert 坐标 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 必满足关系式

$$\xi_3^2-\xi_1^2-\xi_2^2=1$$

$$\xi_3>0$$

又

$$P \longleftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

在平面上的点 P 与非∞而满足上两关系式的三远端组之间建立了一个一一对应关系．这一对应关系在下面也将记作

$$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

定理 3 设 Bolyai-Lobachesky 非欧平面上任两点 P, Q 的 Hilbert 坐标为

$$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \qquad Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

则恒有

$$\xi_3\eta_3 - \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2 > 0$$

又设另有两点

$$P' = (\xi_1', \xi_2', \xi_3') \qquad Q' = (\eta_1', \eta_2', \eta_3')$$

则线段 $|PQ|$ 与 $|P'Q'|$ 全合的充要条件为

$$|PQ| \equiv |P'Q'| \Longleftrightarrow$$
$$\xi_3\eta_3 - \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2 = \xi_3'\eta_3' - \xi_1'\eta_1' - \xi_2'\eta_2'$$

定理 4 连结两个非∞远端 α, β 的直线 $\alpha\beta$，有方程

$$(\alpha\beta - 1)\xi_1 + (\alpha + \beta)\xi_2 - (\alpha\beta + 1)\xi_3 = 0$$

又连结一非∞远端 α 与∞的直线 $\alpha\infty$，有方程

$$\alpha\xi_1 + \xi_2 - \alpha\xi_3 = 0$$

方程中的 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 各是直线 $\alpha\beta$ 或 $\alpha\infty$ 上任一点的 Hilbert 齐次坐标.

今将定理中的两直线方程写成

$$u_1\xi_1 + u_2\xi_2 - u_3\xi_3 = 0$$

其中对于 $\alpha\beta$ 的情形:

$$u_1 = \frac{\alpha\beta - 1}{\beta - \alpha} \qquad u_2 = \frac{\alpha + \beta}{\beta - \alpha} \qquad u_3 = \frac{\alpha\beta + 1}{\beta - \alpha}$$

而对于 $\alpha\infty$ 的情形

$$u_1 = \alpha \qquad u_2 = 1 \qquad u_3 = \alpha$$

不论何时，上述方程都称为趋向于 α 的直线 $\alpha\beta$ 或 $\alpha\infty$ 的规范形式，而以 (u_1, u_2, u_3) 为其 Hilbert 齐次线坐标，简记为

$$\overrightarrow{\beta\alpha} \text{ 或 } \overrightarrow{\infty\alpha} = (u_1, u_2, u_3)$$

于是对于趋向于另一远端 β 的直线 $\alpha\beta$ 记为

$$\overrightarrow{\alpha\beta} = (-u_1, -u_2, -u_3)$$

对于趋向于远端∞的直线 $\alpha\infty$，我们称

$$-\alpha\xi_1 - \xi_2 - \alpha\xi_3 = 0$$

为其规范形式，或置 $u_1 = u_3 = \alpha$，$u_2 = 1$ 如前时，

$$\overrightarrow{\alpha\infty} = (-u_1, -u_2, -u_3)$$

右端为 $\overrightarrow{\alpha\infty}$ 的 Hilbert 齐次线坐标.

易见这些线坐标之间有关系式

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 1$$

反之，任一满足这一关系式的三个远端 u_1, u_2, u_3，必恰是一条趋向于其某一远端的直线的 Hilbert 齐次线坐标. 其次又容易证明任一方程

$$v_1\xi_1 + v_2\xi_2 - v_3\xi_3 = 0$$

只需

$$v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 > 0$$

即可化成规范形式. 事实上对于任一正远端 $\alpha > 0$，命 t 使 $\lambda_t = \alpha$，则 $\lambda_{t/2} = \beta$ 满足 $\beta > 0$，且 $\beta^2 = \alpha$，故可记之为$\sqrt{\alpha}$. 于是置

$$u_i = \pm v_i / \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v_3^2}$$

即得所求的规范形式，其中$\pm$代表了两个向远端的不同趋向.

至此，我们已建立了(Hilbert)坐标系统，并将点与有向直线都用满足某种等式或不等式关系的三个远端所构成的组，即(Hilbert)齐次点坐标或线坐标来表达. 于是一些具有几何意义的几何关系也可通过相应点坐标与线坐标之间的关系式来表达. 现试举其主要者如下：

1.平行.

两有向直线的线坐标若各为

$$\overrightarrow{l_u} = (u_1, u_2, u_3) \qquad \overrightarrow{l_v} = (v_1, v_2, v_3)$$

则这两有向直线依规定方向平行的充要条件为

$$u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3 = 1$$

2.垂直.

设两有向直线 $\overrightarrow{l_u}$, $\overrightarrow{l_v}$ 同上述的 1，则二者垂直的条件为

$$u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3 = 0$$

3.线段的全合.

见前定理 3.

4.两点间距离.

两点

$$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \qquad Q = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$$

间的距离 d 由下式定出:

$$\gamma_d = \xi_3\eta_3 - \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2 (>0)$$

这里 d 作为 $\theta\infty$ 轴上的正向线段，恒取正值.

5.点至直线距离.

设点

$$P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

有向直线为

$$\vec{l} = (u_1, u_2, u_3)$$

则点 P 至 $\vec{l}$ 的距离 t 由下式给出:

$$\sigma_t = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 - u_3\xi_3$$

当点 P 不在直线 l 上时，$\sigma_t \neq 0$，因而 t 作为 $\theta\infty$ 上的有向线段可取正负两值. 取正值还是负值，视点 P 在 $\vec{l}$ 的哪一侧而定，见下述的 7.

6.点与直线的关联.

设点 P 与直线 $\vec{l}$ 同上述的 5，则 P 与 $\vec{l}$ 关联的充要条件为

$$u_1\xi_1 + u_2\xi_2 - u_3\xi_3 = 0.$$

7.直线的两侧.

设有向直线为

$$\overrightarrow{l_u} = (u_1, u_2, u_3)$$

则 $\overrightarrow{l_u}$ 的两侧各由

$$u_1\xi_1 + u_2\xi_2 - u_3\xi_3 > 0$$

与

$$u_1\xi_1 + u_2\xi_2 - u_3\xi_3 < 0$$

确定. 若 $P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, 而 P 对 $\overrightarrow{l_u}$ 的方位恰如 $\overset{+}{1}$ 对 $O\infty$ 的方位,则不等式中应取大于 0, 否则取小于 0. 这两侧将各称为有向直线的正侧与负侧.

8.角的大小.

对于在原点 O 处的一个角 $\measuredangle O(\alpha, \beta) = \varphi$, 不妨以 $(\alpha - \beta)/(\alpha\beta + 1)$ 作为 φ 的一个函数 T 来量度 φ 的大小:

$$T(\varphi) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta + 1}$$

如果另有一角 $\measuredangle O(\beta, \gamma) = \psi$:

$$T(\psi) = \frac{\beta - \gamma}{\beta\gamma + 1}$$

则对于 φ 与 ψ 之和 $\varphi + \psi = \measuredangle O(\alpha, \gamma)$, 易见有

$$T(\varphi + \psi) = \frac{T(\varphi) + T(\psi)}{1 - T(\varphi) \cdot T(\psi)}$$

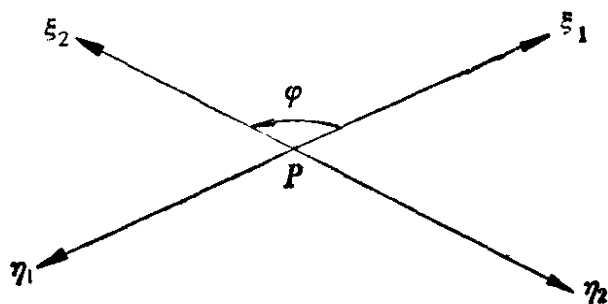


图 6.15

如图 6.15,若角 φ 的顶点在任意一点 P 处,其两边的远端各为 ξ_1, η_1 与 ξ_2, η_2: $\varphi = \measuredangle P(\xi_1, \xi_2)$, 则依 Liebmann [1], φ 的大小可用下面的函数 T 给出:

$$[T(\varphi)]^2 = -\frac{\xi_1 - \xi_2}{\xi_1 - \eta_2}\bigg/\frac{\eta_1 - \xi_2}{\eta_1 - \eta_2}$$

可证上式右端恒取正值或 0. 对于 $T(\varphi)$ 的可能取的正负两值,可由 7 来确定,又若 P 为原点 O, 因而 $\eta_1 = -1/\xi_1$, $\eta_2 = -1/\xi_2$

时，即得前面的一式.

如果几何满足连续性公理，因而诸大小都可看作实数，则T即为通常的正切函数：

$$T(\varphi)=\tan\frac{1}{2}\varphi$$

但这里并不假定任何连续公理，T以及前面的γ, σ, τ等函数都是通过几何中其它公理而引入的，其性质是纯代数的.

9.平行角.

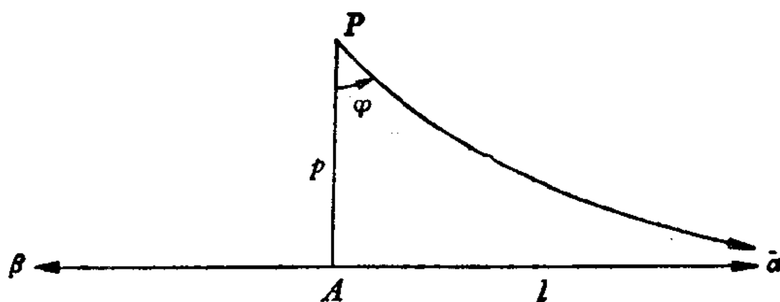


图 6.16

如图 6.16，设直线l的远端为α, β，P为l外一点与l的垂直距离为$PA=p$，则$P\alpha$与$A\alpha$平行，而$\measuredangle P(PA, P\alpha)$通称为$P$对$l$的平行角，记为$\varphi$，则有

$$T(\varphi)=\lambda_{-p}$$

这里T与φ都由几何公理纯代数地定义，而不必象通常那样依赖于连续公理.

10.任两直线$l_1=(u_1, v_1, w_1)$与$l_2=(u_2, v_2, w_2)$有以下关系

l_1, l_2相交$\Longleftrightarrow |u_1u_2+v_1v_2-w_1w_2|<1$

l_1, l_2平行$\Longleftrightarrow |u_1u_2+v_1v_2-w_1w_2|=1$

l_1, l_2有公共垂线(既不相交也不平行)

$$\Longleftrightarrow |u_1u_2+v_1v_2-w_1w_2|>1$$

中间一式绝对值取＋值或－值，视其平行方向的远端而定.

综上所述，可见在以点和直线作为基本对象，以公理 HI－HIV（HIV 指 HIVBL）为基础的 Bolyai-Lobachevsky 几何中，通过

远端运算与 Hilbert 坐标系，点与直线都可用远端组表示. 在这一几何中，点与直线的关联、平行、垂直、次序分隔、线段与角的全合等基本关系或派生关系，都可以通过点与直线坐标的多项式等式或不等式关系来表达，因此依本章第 1 节可得下述基本定理.

机械化定理 Bolyai-Lobachevsky 双曲型平面非欧几何的几何定理有机械化证法.

至于在几何中关于线段长度，角度大小等度量概念，需通过一些函数，如 T, λ, γ, σ, τ 等来表达. 但这些函数可以通过远端的某些有理函数来表达. 而这些函数相互之间的关系又是多项式的代数关系，因此有关它们之间的恒等式以及相应的几何定理也可以机械地推导与证明，详见本章第 6 节.

6.4 Riemann 椭圆型非欧几何定理证明的机械化

所谓 Riemann 椭圆型非欧几何，简捷地说，即是附有度量概念的投影几何. 为简便计，以下讨论仍将局限于平面的情形，我们基本上依据 Podehl-Reidemeister [1] 以及 Bachmann-Reidemeister[1] 两文来描述，自然也作了若干修改.

首先，这种几何的基本对象仍为点与直线两种. 暂置次序关系不论，而基本关系将取为关联关系与垂直关系两种. 但与上引 Podehl-Reidemeister 等文不同，点偶的全合关系将作为派生关系来引入，这些基本对象与基本关系将假定满足以下诸公理.

EI 关联公理 包括平面无序投影几何的关联公理、无限公理与投影 Pappus 公理，详见本章第 2 节. 投影 Desargues 公理已成为定理.

EII **垂直公理**（**EII1—EII4**）

II1 若 a 为一直线，则每过一点至少有一直线 b，与 a 不同且与 a 垂直，记作 $b\perp a$.

II2 过任一直线 a 上一点，有且只有一直线 b 与 a 垂直，仍

记作 $b\perp a$.

II3 若 $b\perp a$，则也有 $a\perp b$.

II4 若过一点 P 可作一直线 a 的两不同直线都与 a 垂直，则过 P 的任一直线都与 a 垂直.

在公理 EII4 中，点 P 称为直线 a 的极点，而 a 称为 P 的极线.

从这些公理可知，一点不能在它的极线上，直线上任一点的垂线都经过这一直线的极点. 又若点 B 在点 A 的极线上，则点 A 也在点 B 的极线上. 这时 A，B 两点称为互相共轭，这些公理也排除了迷向线，即与它自身相垂直的直线的存在.

由于公理 EI，通常无序投影几何中的定理都成立，特别在一直线上可象通常那样定义调和点列，调和分割，点对的对合等. 今在几何中再添入下面的公理.

II5 在任一直线上互相共轭的点对成一对合.

这一公理的几何意义将在下面说明.

定义 以点与直线为基本对象，关联、垂直为基本关系，而满足以上 EI，EII 等公理的几何称为 **Riemann 无序(平面)椭圆型垂直几何.**

以上这些公理并不是互相独立的. 例如投影 Pappus 公理即可从其它许多公理得出. 但本书中对这种公理间的相互逻辑关系将不予讨论. 对我们来说具有重要意义的是下面的定理:

机械化定理1 Riemann 无序(平面)椭圆型垂直几何的几何定理有机械化证法.

为证此，先作若干准备如下.

今引进一投影坐标系统 $(A_1A_2A_3I)$，使三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 的每一顶点都是对边的极点，称这样的坐标系统为对极坐标系统.

依据第 2 节，对于任一投影坐标系统而言，一个点 $(x_1:x_2:x_3)$ 在一直线 $[u_1:u_2:u_3]$ 上的充要条件为

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$$

把点 $(x_1:x_2:x_3)$ 变为点 $(x'_1:x'_2:x'_3)$ 的任一直射变换可表示为一组方程

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} J(x_j) \qquad i = 1, 2, 3$$

其中 J 为几何附属数域 **K** 的一个自同构,而行列式 $|a_{ij}| \neq 0$. 同样把任一点 $(x_1 : x_2 : x_3)$ 变为直线 $[u_1 : u_2 : u_3]$ 的逆射变换可表示为一组方程

$$u_i = \Sigma a_{ij} J(x_j) \qquad i = 1, 2, 3$$

其中 J 也是 **K** 的一个自同构,而行列式 $|a_{ij}| \neq 0$.

把一个点变为它的极线，把一直线变为它的极点的变换称为椭圆型垂直几何的对极变换. 显然这一变换是一逆射变换，它不仅保持了点与直线的关联关系，而且把互相共轭的点变为互相垂直的直线，又把互相垂直的直线变为互相共轭的点. 这样的变换自然可用上面最后形式的方程组来表示,但其中 a_{ij} 与自同构 J 应有某种特殊性. 如果坐标系统是一对极坐标系统，则方程组可大为简化,特别是自同构 J 将成为恒同同构. 下面的定理源于 Podehl-Reidemeister [1]，它给出了对极变换的形式，可视为椭圆型垂直几何的一个主要定理.

定理 1 在一对极坐标系统下,对极变换可表示为

$$u_i = k_i x_i \qquad i = 1, 2, 3$$

其中 $k_1 k_2 k_3 \neq 0$.

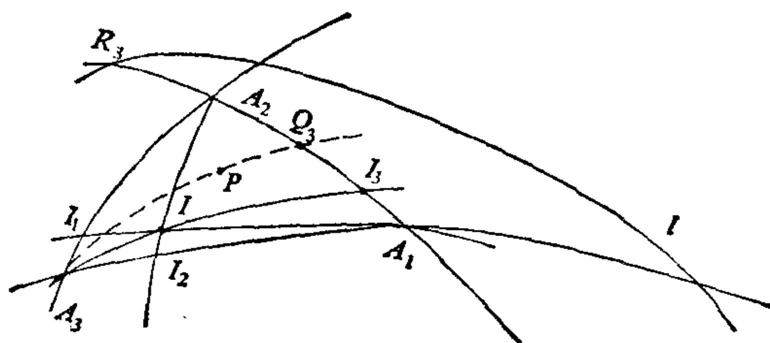


图 6.17

证 为证这一定理,设对极坐标系 $(A_1 A_2 A_3 I)$ 的 $A_i I$ 与 $A_{i+1} A_{i+2}$ 交于 I_i, 依第 2 节,在 $A_{i+1} A_{i+2}$ 上定义数域

$$N_i = N(A_{i+1}, I_i, A_{i+2})$$

并恒同为几何的附属数域 **K**，这里 $i = 1, 2, 3$ 且诸点 A_i 依指数

i 的模 3 定义．今设在这一坐标系下，一点 P 的齐次坐标为$(a_1:a_2:a_3)$，P 的极线为 l，其齐次坐标为 $(b_1:b_2:b_3)$．命 A_iP 与 l 各与 A_{i+1} 和 A_{i+2} 交于 Q_i 与 R_i，则 Q_i 与 R_i 互相共轭，且 Q_i，R_i 的齐次坐标各为

$$Q_3=(a_1:a_2:0)\qquad R_3=(-b_2:b_1:0)\ 等等.$$

我们的目的在于证明有由坐标系 $(A_1A_2A_3\bar{I})$ 所确定的非 0 数 $k_i\in\mathbf{K}$，使不论 P 点为何，恒有

$$b_1:b_2:b_3=k_1a_1:k_2a_2:k_3a_3$$

为此将先作一种几何如次．

这一新几何是由“点”与“直线”两种基本对象组成，其中“点”即原来几何中不在 A_1A_2 上的点，“直线”即原来几何中与 A_1A_2 不同的任一直线．把原来几何中不在 A_1A_2 上的一点 A 和不同于 A_1A_2 的一直线 a 视作新几何中的“点”与“直线”，这一“点”或“直线”各记为“A”与“a”．

今在新几何中如下引入“关联”、“平行”与“垂直”三种基本关系：

“点”“A”在“直线”“a”上 $\Longleftrightarrow$ A 在 a 上

“直线”“a”$\|$“直线”“b” $\Longleftrightarrow$ a，b 的交点在 A_1A_2 上

“直线”“a”$\perp$“直线”“b” $\Longleftrightarrow$ a，b 与 A_1A_2 的交点共轭

不难验证，依据原来的几何公理 EI，EII，新几何将满足第二章 2.2 节关于无序垂直几何的所有公理．例如该节的垂心公理 O_5，即可从本节关于对合的公理 EII_5 得出．这也说明了公理 EII5 的几何意义．

在这一新几何中，“直线”“A_3A_1”与“A_3A_2”互相“垂直”．因而在新几何中可取一“垂直坐标系统”，以“A_3”为“原点”，“A_3A_1”与“A_3A_2”为第一、二“坐标轴”，而以“I_2”，“I_1”为“单位点”．这时依直线上数系统的定义，易见有自然同构

$$N(A_3,I_2)\approx N(A_3,I_2,A_1)$$
$$N(A_3,I_1)\approx N(A_3,I_1,A_2)$$

又在直线 A_2A_3 上任一不同于 A_2，A_3 的点 X，在 $N(A_2,I_1,A_3)$与

$N(A_3, I_1, A_2)$ 中所对应的数各为 x 与 x' 时，易见有关系 $xx'=1$. 由此易知，若点 $P=(a_1:a_2:a_3)$ 不在 A_2A_3 上，因而 $a_3\neq 0$ 时，点 "P"对上述"垂直坐标系统"的"坐标"将为 "P" $=\left(\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3}\right)$. "直线" "$A_3Q_3$" 与 "$A_3R_3$" 的方程将各为

$$a_2x_1 = a_1x_2$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 = 0$$

今依第二章 2.3 节，上述"垂直坐标系统"确定了一个非 0 "垂率"，记为 k_3^*，则因 "A_3Q_3" 与 "A_3R_3" 互相"垂直"，故应有

$$k_3^*a_2b_1 - a_1b_2 = 0$$

同样，我们可另作一新几何，以原来几何中 A_1A_3 以外的点为新几何的"点"，不同于 A_1A_3 的直线为新几何的"直线"，并引入相应的"关联"、"平行"、"垂直"等基本关系如前，于是与前同样可证应有非 0 的数 k_2^*，使

$$k_2^*a_3b_1 - a_1b_3 = 0$$

由于 a_1, a_2, a_3 不能同时为 0，b_1, b_2, b_3 亦然，故由以上两式可得都非 0 的数 k_1, k_2, k_3，例如

$$k_1 = 1 \qquad k_2 = k_3^* \qquad k_3 = k_2^*$$

使

$$b_1:b_2:b_3 = k_1a_1:k_2a_2:k_3a_3$$

这就证明了定理 1.

显然定理 1 中的 k_1, k_2, k_3 只确定到一个非 0 的比例因子. 我们称

$$k_1:k_2:k_3$$

为由对极坐标系统 $(A_1A_2A_3I)$ 所定的**垂率比**.

由定理 1 易得机械化定理 1 的证明如下.

任取一对极坐标系统并命依定理 1 相应的垂率比为 $k_1:k_2:k_3$，这里 $k_1k_2k_3\neq 0$. 在此坐标系下，一点 $P=(x_1:x_2:x_3)$ 与一直线 $l=(u_1:u_2:u_3)$ 相关联的充要条件为

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$$

又设两直线

$$l_u = (u_1 : u_2 : u_3) \qquad l_v = (v_1 : v_2 : v_3)$$

若 l_u 的极点为 $P = (x_1 : x_2 : x_3)$，则依定理 1 有

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{k_1} u_1 : \frac{1}{k_2} u_2 : \frac{1}{k_3} u_3$$

因 l_u，l_v 互相垂直的充要条件为 l_v 经过 l_u 的极点 P，故即为

$$\frac{1}{k_1} u_1 v_1 + \frac{1}{k_2} u_2 v_2 + \frac{1}{k_3} u_3 v_3 = 0$$

或

$$k_2 k_3 u_1 v_1 + k_3 k_1 u_2 v_2 + k_1 k_2 u_3 v_3 = 0$$

于是几何中的基本关系都可通过坐标间的多项式等式关系来表达．因此由第 1 节的基本原理，这种几何的定理证明可以机械化．如所欲证．

象第二章 2.2 至 2.4 节那样，我们可在无序椭圆型垂直几何中引入中点、对称、反射等派生概念，并引入一新公理：

对称轴公理　对任两直线 a_1，a_2 有一对称轴 l，使 a_1，a_2 对称于 l．

我们称满足这一对称轴公理的无序椭圆垂直几何为**无序（平面）椭圆型度量几何**，在其中可引入全合关系作为派生关系，引入度量概念作为派生概念．同样可以象本章第 2 节那样添入分隔关系作为基本关系并引入诸分隔公理．由此可以定义各种有序的椭圆型垂直几何、度量几何以及通常的所谓 Riemann 椭圆型非欧几何．正象上面的机械化定理那样，可以证明下面的定理．

机械化定理 2　无序椭圆度量几何以及各种有序的椭圆型垂直几何、度量几何与非欧几何，其定理证明都可以机械化．

证明甚易故从略．作为补充，给出下面的定理，其证明也从略．

定理 2　在对极坐标系统下设四点

$$A = (x_1 : x_2 : x_3) \qquad B = (y_1 : y_2 : y_3)$$
$$A' = (x_1' : x_2' : x_3') \qquad B' = (y_1' : y_2' : y_3')$$

则点偶全合

$$(AB)=(A'B')$$

的充要条件为

$$\frac{(k_1x_1y_1+k_2x_2y_2+k_3x_3y_3)^2}{(k_1x_1^2+k_2x_2^2+k_3x_3^2)(k_1y_1^2+k_2y_2^2+k_3y_3^2)}$$

$$=\frac{(k_1x_1'y_1'+k_2x_2'y_2'+k_3x_3'y_3')^2}{(k_1x_1'^2+k_2x_2'^2+k_3x_3'^2)(k_1y_1'^2+k_2y_2'^2+k_3y_3'^2)}.$$

6.5 两种圆几何学定理证明的机械化

迄今为止，本书所考虑的各种（平面）几何都以点与直线作为基本对象．这自然并非非有不可的限制．在历史上，就曾出现过种种以其它图象，特别是以圆作为基本讨论对象的各种几何学．对于圆几何学研讨较多的有两种，其一是所谓 Möbius 几何或反演(inversive) 几何，研究复平面上圆的相切、圆的交角等一类性质．另一个是所谓 Laguerre 几何，或称 equilong 几何，研究平面上的有向直线、有向圆等同向相切一类性质．参阅 Klein [2] 第 49 和 67 节，以及 Morley-Morley [1] 等著作．这些几何在 Van der Waerden 与 Smid [1] 这一专文中作了公理化的处理，其后又经 Ewald [1]，Uhl [1] 等作了一些改进．我们将指出这些几何同样也可以机械化，但将只作极其简略的介绍，详细论证著者将另写专文．

1. Möbius 圆几何学．

这种几何的基本对象有两种：点与圆．基本关系主要是关联关系：点在圆上，两圆相切或两圆直交既可作为基本关系也可作为派生关系来引入．在公理系统中，有一条以 Miquel 命名的公理有着特别重要的作用．它所扮演的角色，类似于 Pappus 公理之于投影几何．今叙述如下．

Miquel 公理 设八个点

$$A\ B\ C\ D$$

$A'B'C'D'$

从上面四点中任取两点，又从下面四点中取不在同列中的两点，这样四点所成的组共有六个．如果六个组中有五个组中的四点都同在一圆上，而且这些圆与点都彼此不同，则第六个组中的四个点也必同在一个圆上．

这一 Miquel 公理也有各种较弱的变形．

今称彼此在同一点相切的圆成一圆束，则 Van der Waerden 用下法在平面中引进了数系统并使之坐标化．

在圆几何平面中任取一固定的点W．今作一投影平面 **P** 如次．

P 中的"点"或是原平面中不同于W的任一点，或是以W为公共切点的任意一个圆束．前者称为**P**的"主点"，后者称为"付点"．

P 中的"直线"或是原平面中任一过W的圆，称为"主线"，或是一条经过所有"付点"的"直线"，称为"付线"，记作 g．

P 中"点"与"直线"的关联关系的定义是显然的．

容易证明，**P** 中的"点"与"直线"在上述关联关系下，满足通常无序投影几何的公理，特别是 Pappus 公理可应用 Miquel 公理得证．因之相应的投影几何可引进附属数域 **K**．取定一投影坐标系，其中坐标三角形的一边即为付线 g 后，可证原平面中的圆都是新投影平面中的"二次曲线"，其方程的二次部份(相应于坐标三角形的另两边)有固定形式．由此易得原来圆几何定理证明可以机械化的结论．

2. Laguerre 圆几何学．

这种几何以常用平面几何中有向直线与有向圆等图象所构成的几何为其具体模型，公理化后的 Laguerre 几何以矛 (Speere = 有向直线)与环 (Zykel = 有向圆) 为基本对象．基本关系有矛与环的关联，环的相切，与矛的平行等．其中矛的平行也可以作为派生关系定义为不与同一环关联，环的相切也可以作为派生关系定义为恰与同一矛关联．矛与环关联有时也称为矛环相切．与两环都相关联的矛的个数只能是 0，1，或 2．这种几何中没有点的概念，

最多只能作为派生概念来引入．见图 6.18．

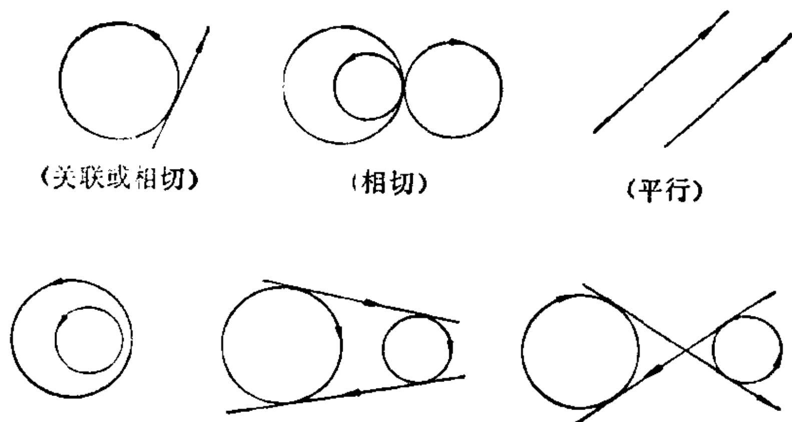


图 6.18

在公理系统中，有一条与 Möbius 几何中的 Miquel 公理相当的公理占有特别重要的位置，仍称为 Miquel 公理，述之如下．

Miquel 公理 设矛 W 与三环 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 都相切(即相关联)．又环 α_2, α_3 以矛 A_1 为其公共切矛之一，同样环 α_3, α_1 与环 α_1, α_2 各有公共切矛 A_2, A_3．又环 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 各与另外三矛 P_1, P_2, P_3 相切，而后者彼此互不平行．设以上诸矛彼此都不相同，又设环 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 各与矛 $A_1P_2P_3$, $A_2P_3P_1$, $A_3P_1P_2$ 相切，则 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 有一公共的切矛 B．

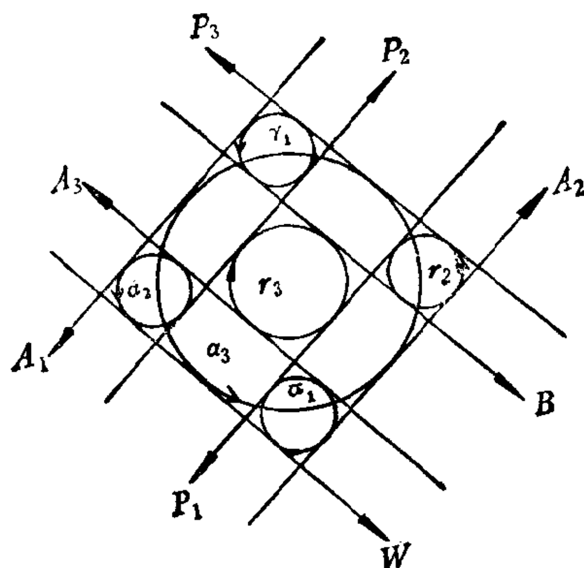


图 6.19

今称彼此相切且又与一定矛 S 相切的环的集体为一以 S 为公共切矛的**切族**，于是与 Möbius 几何相类似，可以对偶的方式作一投影平面如下.

在原来圆几何平面中任取一固定的矛 W，称之为**基矛**. 定义一投影平面 $\mathbf{P}$，其中的"点"有三种：任一不与 W 平行的矛，称为"主点"；任一以 W 为公共切矛的切族，称为"付点"；一个单独的"点"，称为"基点"，记作 G. $\mathbf{P}$ 中的"直线"也有三种：任一与 W 相切的环 z，称为"主线". 这一"主线"上的"点"包括了与 z 相切而不与 W 平行的矛所对应的"主点"以及由 W 与 z 确定的切族所对应的"付点"；任一由互相平行的矛所组成的**矛族**，称为"付线"，这一付线上的"点"包括了矛族中的矛所对应的"主点"以及一个"基点" G；一个单独的"直线"，称为"基线"，这一"基线"上的"点"包括了所有以 W 为公共切矛的切族所对应的"付点"，也包括了"基点" G.

Smid 在 Van der Waerdeu-Smid [1] 中证明了这些"点"与"直线"所定的几何满足无序投影几何的许多公理，特别是可用 Miquel 公理来证明 Pappus 公理. 于是在这一几何中可引进坐标系统，其中不与 W 相切的环将表示为一二次曲线，由此容易得出 Laguerre 几何定理证明可以机械化的相应机械化定理.

6.6 超越函数公式证明的机械化

1. 三角函数恒等式的机械化证明.

在中国古代的常用几何中，长度、面积与体积的量度占有重要地位，但很少提到角及其量度. 在近代的 Riemann 几何中，也以 ds^2 或弧的长度作为基本概念，其它如角的量度等都由此而派生. 与这两者相反，在通常欧几里得形式的常用几何中，角与线段是几乎处于同等地位的两个重要度量概念，特别在三角形中，对于边角关系的考虑具有根本性的意义. 这些关系都通过一些三角函数 sin，cos，tan 等来表达，而这些三角函数都是角的所谓超越函数，对它们的研讨往往是不容易的. 然而，如果我们采用 Descartes 坐

标系，命角 A 的始边与横轴的正向射线重合，并在终边上任取一点 $P=(x, y)$，则这些三角函数都成为 x, y 以及 $\overline{OP}=r$ 的有理函数，即

$$\sin A=y/r \qquad \cos A=x/r \qquad \tan A=y/x$$

这里

$$r^2=x^2+y^2 \qquad r>0$$

因而原则上这些超越函数都可通过有理函数甚至多项式之间的关系来处理．这使得几何中角的概念以及角与线段间的超越关系可以通过其它形式来表达，甚至可以避免使用．如果真正要考虑这些关系而导致所谓三角函数间的恒等式时，也可以依据本章第1节运用第三至五章中的方法，给出机械化的证明．下面进行说明．

首先，对于同一个角的六个三角函数之间，有着下面的一些多项式关系：

(1) $\sin^2 A+\cos^2 A=1$

(2) $\tan A\cos A=\sin A$

(3) $\cot A\sin A=\cos A$

(4) $\sec A\cos A=1$

(5) $\csc A\sin A=1$

(6) $\sec^2 A=1+\tan^2 A$

(7) $\csc^2 A=1+\cot^2 A$

其次，对于负角有下面的多项式关系：

$$(8)\ \begin{cases}\sin(-A)=-\sin A & \cos(-A)=\cos A\\ \tan(-A)=-\tan A & \cot(-A)=-\cot A\\ \sec(-A)=\sec A & \csc(-A)=-\csc A\end{cases}$$

对于角和差的函数则有多项式关系如下：

(9) $\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$

(10) $\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$

(11) $\tan(A\pm B)(1\mp\tan A\tan B)=\tan A\pm\tan B$

最后，对于某些特殊的角如 $0, \pi/2, \pi$ 等有下面的一些关系(n 为任意整数)：

(12) $A = n\pi \Longleftrightarrow \sin A = 0$

(13) $A = 2n\pi \Longleftrightarrow \cos A = +1 \qquad \sin A = 0$

(14) $A = (2n+1)\pi \Longleftrightarrow \cos A = -1 \qquad \sin A = 0$

(15) $A = \frac{\pi}{2} + n\pi \Longleftrightarrow \cos A = 0$

(16) $A = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \Longleftrightarrow \sin A = 1 \qquad \cos A = 0$

(17) $A = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \Longleftrightarrow \sin A = -1 \qquad \cos A = 0$

这种特殊角的关系可按情况而增加.

也可以考虑半角公式:

(18) $\sin^2 A/2 = (1 - \cos A)/2$

(19) $\cos^2 A/2 = (1 + \cos A)/2$

(20) $\tan A/2 = \sin A/(1 + \cos A) = (1 - \cos A)/\sin A$

自然,上面的这些关系并不是独立的,且都通过 sin , cos , tan 等的原始定义得出.

若一个需要证明的三角恒等式牵涉到角 A, B, 则可将这些角的三角函数用 x, u 等表示,于是依据前面的 (1)—(17) 等式原来的恒等式变为 x, u 间的多项式关系,这一多项式关系是否成立,即可依据第 1 节中所说的机械化方法来证明. 下面是一个具体的实例.

[例 1] 试证对一个三角形 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三个角 A_1, A_2, A_3, 有恒等式

$$\sin 2A_1 + \sin 2A_2 + \sin 2A_3 = 4\sin A_1 \sin A_2 \sin A_3$$

解 作为三角形的三个角,有

$$A_1 + A_2 + A_3 = \pi$$

今依和角公式(9),(10)以及(14),从这一假设得

$$\cos A_1 \cos A_2 \cos A_3 - \cos A_1 \sin A_2 \sin A_3 - \sin A_1 \cos A_2 \sin A_3 - \sin A_1 \sin A_2 \cos A_3 + 1 = 0$$

以及

$$\sin A_1 \cos A_2 \cos A_3 + \cos A_1 \sin A_2 \cos A_3 + \cos A_1 \cos A_2 \cos A_3 - \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 = 0$$

同样要求证的恒等式也可化为

$$\sin A_1 \cos A_1 + \sin A_2 \cos A_2 + \sin A_3 \cos A_3 - 2 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3 = 0$$

今置

$$\sin A_1 = u_1 \qquad \sin A_2 = u_2$$
$$\cos A_1 = x_1 \qquad \cos A_2 = x_2$$
$$\sin A_3 = x_3 \qquad \cos A_3 = x_4$$

于是原来的问题导致下面的问题.

假设方程组可取为

$$F_1 \equiv x_1^2 + u_1^2 - 1 = 0$$
$$F_2 \equiv x_2^2 + u_2^2 - 1 = 0$$
$$F_3 \equiv (x_1x_2 - u_1u_2)x_3 + (u_1x_2 + u_2x_1)x_4 = 0$$
$$F_4 \equiv -(u_1x_2 + u_2x_1)x_3 + (x_1x_2 - u_1u_2)x_4 + 1 = 0$$

终结方程组为

$$g \equiv x_3x_4 - 2u_1u_2x_3 + u_2x_2 + u_1x_1 = 0$$

问题变为：求证 $g = 0$ 可从 $F_1 = 0, \cdots, F_4 = 0$ 推出.

由于 F_3，F_4 中 x_3，x_4 的系数行列式等于 1，故可解出 x_3，x_4 得

$$F_3' \equiv x_3 - (u_1x_2 + u_2x_1) = 0$$
$$F_4' \equiv x_4 + (x_1x_2 - u_1u_2) = 0$$

问题又变为：试证 $g = 0$ 可从 $F_1 = 0$，$F_2 = 0$，$F_3' = 0$，$F_4'=0$ 推出.

于是依一般的方法将 g 对 F_4'，F_3'，F_2，F_1 的 x_4，x_3，x_2，x_1 依次约化得

$$g \equiv -(u_1x_2 + u_2x_1)(x_1x_2 - u_1u_2) - 2u_1u_2(u_1x_2 + u_2x_1) + u_2x_2 + u_1x_1 \quad \mathrm{mod}\ (F_4', F_3')$$
$$\equiv -u_1x_1x_2^2 - u_2x_1^2x_1 - u_1u_2(u_1x_2 + u_2x_1) + u_2x_2 + u_1x_1 \quad \mathrm{mod}\ (F_4', F_3')$$

$$\equiv -u_1x_1(1-u_2^2)-u_2x_2(1-u_1^2)$$
$$-u_1u_2(u_1x_2+u_2x_1)+u_2x_2+u_1x_1 \qquad \mathrm{mod}\,(F'_4,F'_3,F_2,F_1)$$
$$\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\,(F'_4,\ F'_3,\ F_2,\ F_1)$$

故 $g=0$ 可从 $F'_4=0, F'_3=0, F_2=0$，$F_1=0$ 推出或对 $\Delta A_1A_2A_3$ 的三个角原来的恒等式成立.

上面的方法可机械地进行，且可适用于各种三角恒等式. 例如用同样的机械方法可证:

若三个角 A_1, A_2, A_3 满足

$$A_1+A_2+A_3=(2n+1)\pi$$

则恒等式

$$\cos 2A_1+\cos 2A_2+\cos 2A_3+4\cos A_1\cos A_2\cos A_3=0$$

不成立.

2. 非欧几何定理与双曲函数恒等式的机械化证明.

通常文献中对于两种非欧几何的处理，往往需要用到三角函数、指数函数与双曲函数等超越函数,因而在有关的定理与公式的证明中，经常要用到级数展开和极限逼近等手段. 试以 Bolyai-Lobachevsky 的平面双曲型非欧几何为例. 为简单起见，设这一几何所属常数 $k=1$，参阅 Greenberg [1]. 如图 6.20，在平面中取两互相垂直于 O 的两有向直线作为坐标轴. 从一点 P 作这两轴的垂直线 PU 与 PV. 四边形 $OUPV$ 在 O, U, V 处都是直角,通称为 Lambert 四边形. 记有向距离为

$$\overline{OU}=u \qquad \overline{OV}=v$$
$$\overline{UP}=w \qquad \overline{VP}=z$$

于是在 u, v, w, z 之间有以下超越关系:

$$\tanh w=\tanh v\cosh u$$
$$\tanh z=\tanh u\cosh v$$

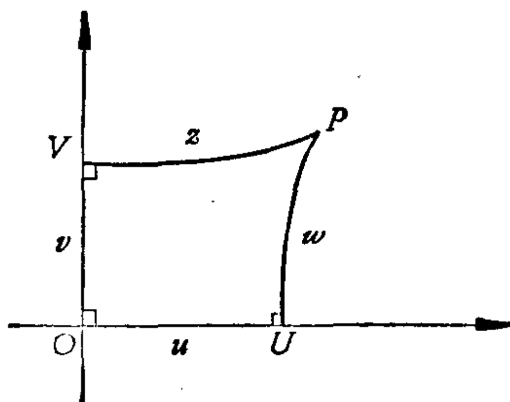


图 6.20

今置

$$x=\tanh u \qquad y=\tanh v$$

$$T = \cosh u \cosh w \qquad X = xT \qquad Y = yT$$

则可有多种不同方式引进 P 点的坐标，例如，

$(u, v) = P$ 的轴坐标

$(u, w) = P$ 的 Lobachevsky 坐标

$(x, y) = P$ 的 Beltrami 坐标

$(T, X, Y) = P$ 的 Weierstrass 坐标

由于这些坐标都使用了超越函数，一些具有几何意义的关系和性质等也就不能不用超越函数来表达，定理与公式也是如此．试举数例如下：

(1) 两点距离．

在轴坐标下，两点 $P_1(u_1, v_1)$，$P_2(u_2, v_2)$ 间的距离 $\overline{P_1P_2}$ 由下式给出：

$$\cosh \overline{P_1P_2} = \frac{1 - \tanh u_1 \tanh u_2 - \tanh v_1 \tanh v_2}{\sqrt{1 - \tanh^2 u_1 - \tanh^2 v_1} \cdot \sqrt{1 - \tanh^2 u_2 - \tanh^2 v_2}}$$

而在 Beltrami 坐标下，则两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 间的距离将简化为

$$\cosh \overline{P_1P_2} = \frac{1 - x_1x_2 - y_1y_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2} \cdot \sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}}$$

但其中仍出现超越函数与无理函数．

(2) 双曲型勾股定理．

设直角三角形 $\triangle ABC$ 的 C 是直角，三边长度是 a，b，c，其中 c 是直角 C 的对边，则有相当于常用几何中勾股定理的关系式

$$\cosh c = \cosh a \cosh b$$

(3) 双曲型余弦定律．

对任意三角形 $\triangle ABC$，三个角为 A，B，C，而对边长度各为 a，b，c 时，有余弦公式

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos c$$

在 C 为直角时，这一公式简化为勾股定理．

其它如两直线的交角、点到直线的距离、圆、极大圆、等距线甚至直线的方程以及平行、垂直、关联等条件，都离不开超越函数，主

要是双曲函数，以下不再列举.

这些超越函数的出现使传统上非欧几何的定理证明往往须通过繁复的三角公式的演算才能完成. 一个办法是象1中关于三角函数公式的证明那样，先列举有关双曲函数间关系的各种公式，例如

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$

等等，于是有关恒等式与几何定理的证明仍可机械地进行，如1所示. 但由于这些双曲函数的出现都须用分析方法定义，因而至少在理论上使几何局限于以实数域或复数域为基本数域的情形. 这样就排除了考虑更一般数域上的几何包括非欧几何在内的可能性，而一般数域上的几何在现代数学中是占有重要位置的.

但是 Hilbert [3] 关于双曲型非欧几何一文通过远端运算所引进的方法，完全避免了使用连续概念建立这种几何的公理系统，使得超越函数成为不必要. 正如 Hilbert 在该文之末所说的那样："同样，Bolyai-Lobachevsky 几何的许多已知公式，可以没有困难地推出，因此这种几何的建立，可以仅仅通过公理 I—IV 即能完成."

Hilbert 这一关于非欧几何三角公式可以容易地推出而不借助于连续公理这一断语，在其后的若干年中得到了证实. 参阅 Liebmann, Gerretsen, Szász, Szmielzev 等人的著作. 在本章第3节中，已经有所阐明，现再将有关部份重述如下.

设双曲型平面非欧几何满足公理系统 HI—HIV(其中 HIV 为 HIVBL)如第 6.3 节所示. 应用远端运算，有几何附属数域 **K**，其特征为 0. 引进互相垂直的坐标轴 0∞ 与 $\overset{-+}{11}$ 以确定 Hilbert 坐标. 于是一点 P 的坐标由 **K** 中的三个数 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 表示，这里

$$\xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 1 \qquad \xi_3 > 0$$

任一有向直线也用 **K** 中的三个数 (u_1, u_2, u_3) 表示，而

$$u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 1$$

如果有向直线的两个远端为 α 与 β，而方向为从 β 走向 α，则在 α，β 都不等于 ∞ 时，

$$u_1 = \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha - \beta} \qquad u_2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \qquad u_3 = \frac{\alpha\beta + 1}{\alpha - \beta}$$

在 $\beta = \infty$ 时，

$$u_1 = -\alpha \qquad u_2 = -1 \qquad u_3 = -\alpha$$

而在 $\alpha = \infty$ 时，

$$u_1 = \beta \qquad u_2 = 1 \qquad u_3 = \beta$$

反之若 (u_1, u_2, u_3) 已定，则两个远端 α, β 各为

$$u_1 \neq u_3 \text{时}, \quad \alpha = \frac{u_2 + 1}{u_3 - u_1} \qquad \beta = \frac{u_2 - 1}{u_3 - u_1}$$

$$u_1 = u_3 \text{ 而 } u_2 = 1 \text{ 时}, \alpha = \infty \qquad \beta = u_1$$

$$u_1 = u_3 \text{ 而 } u_2 = -1 \text{ 时}, \beta = \infty \qquad \alpha = -u_1$$

又点 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 在直线 (u_1, u_2, u_3) 上的条件为

$$u_1\xi_1 + u_2\xi_2 - u_3\xi_3 = 0$$

在 6.3 节中，还引进了一些函数 λ_t, γ_t, σ_t 与 τ_t, 以下将改记为 $\lambda(t)$, $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ 与 $\tau(t)$. 这些函数定义在几何附属数域 **K**上，而其值为远端. 这里

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}(\lambda(t) + \lambda(-t))$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{2}(\lambda(t) - \lambda(-t))$$

$$\tau(t) = (\lambda(t) - \lambda(-t))/(\lambda(t) + \lambda(-t))$$

这些函数的引入依赖于远端运算，而不依赖于任何连续概念，是纯代数的，但满足与实超越函数 $\exp t$, $\cosh t$, $\sinh t$, $\tanh t$ 类似的那些关系式，不再列举. 在同节中还引进了由趋向于远端 α 与 β 的两条过原点的有向直线夹角 φ 的函数

$$T(\varphi) = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta + 1}$$

具有通常实超越函数 $\tan \frac{1}{2}\varphi$ 的那些类似性质. 由此可纯代数地引进另两个(与通常实超越函数 $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ 相当)函数

$$S(\varphi)=\frac{2T(\varphi)}{1+[T(\varphi)]^2}\qquad C(\varphi)=\frac{1-[T(\varphi)]^2}{1+[T(\varphi)]^2}$$

各与通常的函数 $\sin\varphi$，$\cos\varphi$ 相当．

各种有几何意义的几何性质与几何关系，如两线的平行垂直，两点间距离，点至直线距离，两直线交角等等，都可通过这些函数来具体表达，在 6.3 节已有论述．由此知 6.1 节中所指出的机械化方法，即可用之于这种非欧几何定理与公式的证明，正象 Hilbert 所指出的那样，不需要任何连续性的假设．作为实例，试证上述双曲型勾股定理与余弦公式如下．

[例 2] 勾股定理．

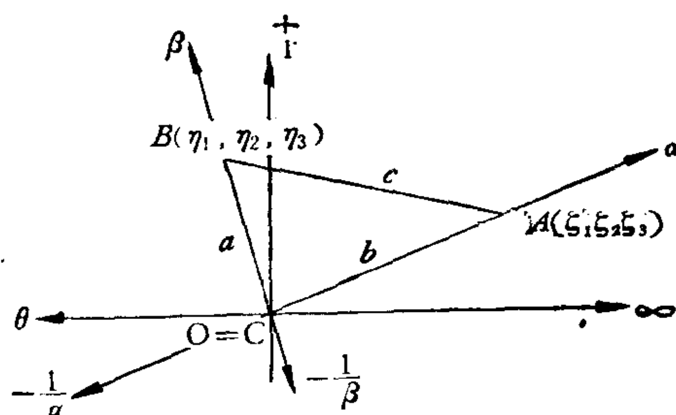


图 6.21

为计算简单起见，将设 ΔABC 的直角顶 C 在 Hilbert 坐标系的原点 O 处，于是在 Hilbert 坐标下

$$C=(0,0,1)$$

又设 A，B 都不在轴 $\theta\infty$ 上，而

$$A=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$
$$B=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$$

则有

$$\xi_3^2-\xi_1^2-\xi_2^2=1\qquad \xi_3>0$$
$$\eta_3^2-\eta_1^2-\eta_2^2=1\qquad \eta_3>0$$

依距离公式有（见 6.3 节）

$$\gamma(a)=\eta_3$$

$$\gamma(b) = \xi_3$$
$$\gamma(c) = \xi_3\eta_3 - \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2$$

今命直线 OA 的远端之一为 α，则另一远端为 $-1/\alpha$，而 $\overrightarrow{O\alpha}$ 的坐标 (u_1, u_2, u_3) 为

$$u_1 = -\frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \qquad u_2 = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2+1} \qquad u_3 = 0$$

同样，若直线 OB 的远端之一为 β，则另一远端为 $-\frac{1}{\beta}$，而 $\overrightarrow{O\beta}$ 的坐标 (v_1, v_2, v_3) 为

$$v_1 = -\frac{2\beta}{\beta^2+1} \qquad v_2 = \frac{\beta^2-1}{\beta^2+1} \qquad v_3 = 0$$

点 A，B 各在直线 OA 与 OB 上的条件为

$$-2\alpha\xi_1 + (\alpha^2-1)\xi_2 = 0$$
$$-2\beta\eta_1 + (\beta^2-1)\eta_2 = 0$$

又角 C 是直角的条件

$$u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3 = 0$$

即

$$4\alpha\beta + (\alpha^2-1)(\beta^2-1) = 0$$

所需求证的公式则为

$$\gamma(c) = \gamma(a)\gamma(b)$$

今引入变量

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{10}, x_{11}$$

使依次等于

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \gamma(a), \gamma(b), \gamma(c), \alpha, \beta$$

其中 α，β 由于假定 A，B 不在 $\theta\infty$ 轴上而有

$$\alpha, \beta \neq \theta, \infty$$

因而

$$x_{10} \neq 0 \qquad x_{11} \neq 0$$

又有

$$x_3 > 0 \text{（即 } \xi_3 > 0\text{）}$$

$$x_6 > 0 \ (\text{即}\ \eta_3 > 0)$$

此外的假设为

$$F_1 \equiv x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$$
$$F_2 \equiv x_6^2 - x_4^2 - x_5^2 - 1 = 0$$
$$F_3 \equiv x_7 - x_6 = 0$$
$$F_4 \equiv x_8 - x_3 = 0$$
$$F_5 \equiv x_9 - x_3x_6 + x_1x_4 + x_2x_5 = 0$$
$$F_6 \equiv x_2x_{10}^2 - 2x_1x_{10} - x_2 = 0$$
$$F_7 \equiv x_5x_{11}^2 - 2x_4x_{11} - x_5 = 0$$
$$F_8 \equiv (x_{10}^2 - 1)(x_{11}^2 - 1) + 4x_{10}x_{11} = 0$$

所需求证的终结多项式关系则为

$$G \equiv x_9 - x_7x_8 = 0$$

今依第四章方法进行. 先将 $F_1, \cdots, F_8$ 整序, 由 $F_6 = 0$, $F_7 = 0$, $F_8 = 0$ 得

$$x_{10}x_{11}(x_1x_4 + x_2x_5) = 0$$

在非退化条件

$$x_{10} \neq 0 \qquad x_{11} \neq 0$$

(依据假设已经成立)下,有

$$F_9 \equiv x_1x_4 + x_2x_5 = 0$$

将 F_9 添入多项式组 $\{F_1, \cdots, F_8\}$, 得

$$A = \{F_1, \cdots, F_8, F_9\}$$

A 的一个准基列为

$$\Phi: F_1, F_9, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, F_7$$

将 G 对 Φ 约化显得 G 的余式为 0, 或

$$G = F_5 - F_3F_4 - x_3F_3 - x_6F_4 - F_9$$

故知 $G = 0$ 可从 $F_1 = 0, \cdots, F_8 = 0$ 推出,而勾股定理得证.

[例 3] 余弦公式.

仍设 $\triangle ABC$ 的顶点 C 在 O 处, 但不再设 C 为直角. 同样仍设 A, B 都不在轴 $\theta\infty$ 上. 记 $\overrightarrow{O\alpha}, \overrightarrow{O\beta}$ 的交角为 φ,则有

$$T(\varphi) = \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$$

$$C(\varphi) = \frac{(1 + \alpha\beta)^2 - (\alpha - \beta)^2}{(1 + \alpha\beta)^2 + (\alpha - \beta)^2}$$

今同例 3 以 $x_1, \cdots, x_{10}, x_{11}$ 表 $\xi_1, \cdots, \alpha, \beta$. 此外又引入变量 x_{12}, x_{13}, x_{14} 使

$$x_{12} = C(\varphi) \qquad x_{13} = \sigma(a) \qquad x_{14} = \sigma(b)$$

于是假设中除 $F_1 = 0, \cdots, F_7 = 0$ 仍与前相同外，$F_8 = 0$ 将变为

$$\begin{aligned} F'_8 \equiv & [(1 + x_{10}x_{11})^2 + (x_{10} - x_{11})^2]x_{12} \\ & - [(1 + x_{10}x_{11})^2 - (x_{10} - x_{11})^2] = 0 \end{aligned}$$

此外又有

$$F'_9 \equiv x_{13}^2 - x_7^2 + 1 = 0$$

$$F'_{10} \equiv x_{14}^2 - x_8^2 + 1 = 0$$

多项式集合 $\Sigma = \{F_1, \cdots, F_7, F'_8, F'_9, F'_{10}\}$ 相当于假设集合(不包括不等式部份).

需要求证的余弦公式

$$\gamma(c) = \gamma(a)\gamma(b) - \sigma(a)\sigma(b)C(\varphi)$$

可改写为求证

$$G' \equiv (x_9 - x_7x_8) - x_{12}x_{13}x_{14} = 0$$

由于符号上的不确定将退而证明

$$\begin{aligned} G'' & \equiv [(x_9 - x_7x_8) + x_{12}x_{13}x_{14}][(x_9 - x_7x_8) - x_{12}x_{13}x_{14}] \\ & \equiv (x_9 - x_7x_8)^2 - x_{12}^2x_{13}^2x_{14}^2 = 0 \end{aligned}$$

今依第四章的一般方法，先将 Σ 整序而扩充为另一多项式组 Λ，再将 G'' 对 Λ 的准基列约化即可知在非退化条件

$$x_2 \neq 0 \qquad x_5 \neq 0 \qquad x_{10} \neq 0 \qquad x_{11} \neq 0$$

下，G'' 对 Λ 的余式为 0，因而 $G'' = 0$ 可从 $F_1 = 0, \cdots F_7 = 0$, $F'_8 = 0$, $F'_9 = 0$, $F'_{10} = 0$ 推出. 由于从原来的假设这些非退化条件自然成立，故不计符号的余弦公式 $G'' = 0$ 得证. 对于原来的余弦公式 $G' = 0$，则可计及假设 $\xi_3 > 0$，$\eta_3 > 0$ 并应用第五章的方法求证.

3. 其它超越函数公式的机械化证明.

在 1 和 2 中说明的方法，不仅可用于常用几何或双曲型非欧几何中定理与公式的证明，同样也可用于球面几何或椭圆型非欧几何中涉及三角函数与双曲函数的那些定理与公式的证明. 不仅如此，对于其它类型的超越函数，在并不需要知道这些函数与连续性有关的确切定义与真正涵义，而只要求求得它们之间形式上的恒等式关系时，也可用类似于上面 1 和 2 的方法获得机械化的证明. 这一方法并可应用于出现这种超越函数的有关几何的定理证明，例如椭圆函数的关于三次曲线理论，θ 函数的关于某些代数曲线与代数曲面的理论等. 这使得许多几何研究中很大一部份超越函数的使用成为不必要，或可以约化为纯代数的方法来处理. 我们希望在今后能有机会作较系统的整理工作.

参 考 文 献

Artin, E.

[1] Geometric algebra, Interscience Publishers (1950).

[2] Uber die Zerlegung Definiter Funktionen in Quadrate, Abh. Hamburg, **5** (1926), 100—115.

Artin, E. and Schreier, O.

[1] Algebraische Konstruktion Reeller Körper, Abh. Hamburg, **5** (1926), 85—99.

Bachmann, F.

[1] Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Springer Verlag (1959).

[2] Axiomatic Aufbau der Ebenen Absoluten Geometrie, in Henkin et al, [1], 114—126.

Bachmann, F. and Reidemeister, K.

[1] Die Metrische Form in der Absoluten und der Elliptischen Geometrie, Math. Annalen, **113** (1937), 748—765.

Baer, R.

[1] The Fundamental Theorems of Elementary Geometry, an Axiomatic Analysis. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **56** (1944), 99—129.

Baker, H. F.

[1] Principles of Geometry, Vol. 1, Foundations, Cambridge Univ. Press (1929).

Chasles, M.

[1] Aperç u historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géomètrie, 3eme ed. Gauthier-Villars (1889).

Coxeter, H. S. M.

[1] Non-euclidean Geometry, Univ. of Toronto Press (1947).

Degen, W. and Profke, L.

[1] Grundlagen der Affinen und Euklidischen Geometrie, Springer Verlag (1976).

Davis, P. J.

[1] La Géométrie de Ren Descartes, Paris (1927).

Descartes, R.

[1] The Schwarz function and its applicetions, Math. Ass. of America (1974).

Ewald, G.

[1] Axiomatischer Aufbau der Kreisgeometrie, Math. Annalen, **131** (1956), 354—371.

[2] Über den Begriff der Orthogonalität in der Kreisgeometrie, Math. Annalen, **131** (1956), 463—491.

Gerretsen, J. C. H.

[1] Die Begründung der Trigonometrie in der Hyperbolischen Ebene, *Indag. Math.*, 4 (1942), 133—139, 169—173, 199—206.

[2] Zur Hyperbolischen Geometrie, *Indag. Math.*, 4 (1942), 207—213.

Greenberg, M. J.

[1] Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History, Freemann and Company (1973).

Gröbner, W.

[1] Moderne Algebraische Geometie, Springer Verlag (1949).

Hartshorne, R.

[1] Foundations of Projective Geometry, Harvard University (1967).

Henkin, L., Suppes, P. and Tarski, A.

[1] The Axiomatic Method, North Holland (1959).

Hermann, G.

[1] Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomieale, Math. Annalen, **95** (1926), 736—788.

Hessenberg, G.

[1] Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen, Math. Annalen,

61 (1905), 161—172.

[2] Begründung der elliptischen Geometrie, Math. Annalen, **61** (1905), 173—184.

Hilbert, D.

[1] Gesammelte Abhandlungen, Bd. 2, Springer Verlag (1933).

[2] Grundlagen der Geometrie, lst ed. (1899), 8th ed. (1956), Teubner. (中译本：江泽涵等译，几何基础，科学出版社1958)。

[3] Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie, Math. Annalen **57** (1903), 137—150, or in Hilbert [2], 8th ed. Anhang. III, 159—177.

[4] Uber die Zahlbegriff, Jahresber. Deut. Math.-Ver., **8** (1900).

[5] Math. Probleme, Archiv f. *Math. u. Phys.* **1** (1901), 44—63, 213—237, or in Ges. Abh., **3** (1935), 290—329.

Hodge, W. V. D., and Pedoe, D.

[1] Methods of Algebraic Geometry, Vol. 1 (1947), Vol. 2 (1952), Cambridge Univ. Press.

Jacobson, N.

[1] Basic Algebra, Vol. 1 Freemann and Company (1974).

Kerekjarto, B.

[1] Les fondements de la Géomètrie, Vol. 1 (1969).

Klein, F.

[1] Vergleichende Betrachtungen über Neuere Geometrische Forschungen, Erlangen 1872, Math. Annalen, **43** (1893).

[2] Vorlesungen über Höhere Geometrie, Auflage 3, Chelsea (1926).

[3] Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie, Chelsea (1927).

[4] Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint, Vol. 2. Geometry, Dover (1939).

Kline, M.

[1] Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford Univ. Press (1972). (中译本：张理京等译，古今数学思想，上海科技文献出版社 1979—1981)。

Knuth, D. E.

[1] The Art of Computer Programming, Vol. 2, Addison-Wesley (1969).

Liebmann, H.

[1] Über die Begründung der Hyperbolischen Geometrie, Math. Annalen, **59** (104), 110—128.

[2] Elementargeometrischer Beweis der Parallelenkonstruktion und Neue

Begründung der Trigonometrischen Formeln der Hyperbolischen Geometrie, Math. Annalen, **61** (1905), 185—199.

Pasch, M. and Dehn, M.

[1] Vorlesungen über neuere Geometrie, Auflage 2 Springer Verlag (1926).

Ritt, J. F.

[1] Differential Equations from the Algebraic Standpoint, Amer. Math. Soc. (1932).

[2] Differential Algebra, Amer. Math. Soc. (1950).

Robinson, A.

[1] Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra North Holland (1963).

[2] On Ordered Fields and Definite Functions, Math. Annalen, **130** (1955). 257—271.

[3] Further Remarks on Ordered Fields and Definite Functions, Math. Annalen, **130** (1956), 405—409.

Salmon, G.

[1] A Treatise on Conic Sections, 6th ed. London (1879).

[2] Higher Plane Curves, 3rd ed. Dublin (1879).

Schur, Fr.

[1] Zur Propoitionslehre, Math. Annalen, **57** (1903), 205—208.

[2] Zur Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie, Math. Annalen, **59** (1904), 314—320.

Seidenberg, A.

[1] A New Decision Method for Elementary Algebra, Annals of Math., **60** (1954), 365—371.

Szasz, P.

[1] Direct Introduction of Weierstrass Homogeneous Coordinates in the Hyperbolic Plane, on the Basis of the End-Calculus of Hilbert, in Henkin et al. [1], 97—113.

[2] Begründung der Analytischen Geometrie der Hyperbolischen Ebene mit den Klassischen Hilfsmittelen, Unabhängig von der Trigonometrie dieser Ebene Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, **8** (1959), 139—157.

[3] Unmittelbare Einführung Weierstrassscher Homogenen Koordinaten in der Hyperbolischen Ebene auf Grund der Hilbertsche Endenrechnung, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, **9** (1958), 1—28.

Szmielew, W.

[1] Some Metamathematical Problems concerning Elementary Hyperbolic

Geometry, in Henkin et al. [1], (1959), 30—52.

[2] A New Analytic Approach to Hyperbolic Geometry, *Fund. Math.*, **50** (1961), 129—158.

Tarski, A.

[1] A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry, Berkeley, (1948—1951).

(中译本：陆钟万译，初等代数和几何的判定法，科学出版社 1959).

[2] What Is Elementary Geometry, in Henkin et al. [1] (1959), 16—29.

Trager, B. H.

[1] Algabraic Factoring and Rational Function Integration, in Proc. 1976 ACM Symp. on Symbolic and Algebraic Computation, (1976), 219—226.

Uhl, A.

[1] Ein axiomatischer Aufbau der Laguerregeometrie Springer Verlag (1964).

Van der Waerden, B. L.

[1] .Moderne Algebra, Auflage 1, Teil 1 (1930), Teil 2 (1911), Springer Verlag.

[2] Algebra, Auflage 4, Springer Verlag. (1955, 1963)

(中译本：丁石孙等，代数学，上、下册，科学出版社1963，1976).

[3] Einführung in die Algebraische Geometrie, Springer Verlag (1945).

[4] Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen, Math. Annalen, **102** (1930), 738—739.

Van der Waerden, B. L. and Smid, L. J.

[1] Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie, Math. Annalen, **110** (1935), 753—776.

Veblen, O. andYoung, J. W.

[1] Projective Geometry, Vol. 1, 2, Boston (1916).

Wang, Ho.

[1] A Survey of Mathematical Logic, Science Press (1959).

[2] Toward Mechanical Mathematics, *IBM J.*, 4 (1960), 2—22.

[3] Formalization and Automatic Theorem Proving, Proc. IFIF Congress Vol. 1 (1965), 51—58.

[4] 数理逻辑通俗讲话，科学出版社(1981).

Wu Wen-jun.

[1] 初等几何判定问题与机械化证明，中国科学(1977)507—516.

On the Decision Problem and the Mechanization of Theorem-Proving in Elementary Geometry, Scientia Sinica, **21** (1978), 159—172.

[2] 初等微分几何的机械化证明，中国科学数学专辑(I)，(1979)，94—102.

[3] Mechanical Theorem-Proving in Elementary Geometry and Differential

Geometry, in Proc. 1980 Beijing DD-Symp., Vol. 2, Science Press (1982), 1073—1092.

[4] Toward Mechanization of Geometry-Some Comments on Hilbert's 'Gr-undlagen der Geometrie", Acta Math. Scientia, **2** (1982).